Suites

Table des matières

1. Suites où l'on parle de $u_{n+1}-u_n$

1. $u_{n+1}-u_n \to 0$, est-ce que (u_n) converge ?
   Non, prendre $u_n = \ln n$.

   Remarque 1. Cet exercice simple est une autre manière de dire que $v_n \to 0 \not\Rightarrow \sum v_n$ CV (en prenant $v_n = u_{n+1}-u_n$).

2. $u_{n+1}-u_n \to \alpha > 0$ donner un équivalent de u_n.
   Réponse : utiliser Césaro.
3. Exercice des petits pas :
   On suppose $u_{n+1}-u_n \to 0$. Montrer que si (u_n) possède deux suites extraites : $\begin{cases} u_{\varphi(n)} \to a \\ u_{\psi(n)} \to b \end{cases}$ avec $a<b$ alors, $\forall c \in]a,b[$, (u_n) possède une suite extraite ayant pour limite c.
   (Autrement dit le spectre est un intervalle).
   Pour simplifier l'énoncé on peut prendre $u_{n^2} \to -1$ et $u_{n^2+1} \to +1$.
   Réponse : soit n_0 assez grand pour qu'au-delà de lui, $|u_{n+1}-u_n| < \varepsilon$ et qu'il existe $n, p \geqslant n_0$ tels que $u_n \geqslant b-\varepsilon$ et $u_p \leqslant a+\varepsilon$. Supposons $p>n$ et soit $n'>n$ le min *des n tels que $u_n < c-\varepsilon$, alors $u_{n'-1} \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$.*

2. Suites où l'on parle de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Dans tout ce paragraphe on considère des suites qui ne s'annulent jamais.

1. Soit (u_n) une suite à termes non nuls. On s'intéresse à la convergence de la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Que dire...
   a. ...si (u_n) CV vers ℓ ?
   b. ...si (u_n) CV vers 0 ?
   c. ...si (u_n) CV vers $+\infty$?
2. On suppose que $u_0>0$ et $v_0>0$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>0,9$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}>1,1$. Que dire de la convergence éventuelle de ces deux suites ?
   $u_n=0,99^n$ convient et toute suite qui DV vers $+\infty$ aussi donc on ne peut rien affirmer ;
   mais $v_n\geqslant w_n$ où (w_n) géométrique de raison 1,1 et de premier terme v_0 : donc (v_n) DV vers $+\infty$.
3. Soit (u_n) une suite à termes non nuls. On s'intéresse à sa convergence. Que dire...
   a. ...si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ CV vers ℓ ?
   b. ...si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ CV vers 0 ?
   c. ...si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ CV vers $+\infty$?
4. On suppose que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to\ell\in]0;1[$. Montrer que $u_n\to 0$.
   En choisissant bien ε, on a, à partir d'un certain rang, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<\ell+\varepsilon<1$.
   Donc $|u_n|$ est majorée par une suite géométrique de raison <1.
5. On suppose que $\left|\dfrac{u_{n+2}}{u_n}\right|\to\ell\in]0;1[$. Montrer que $u_n\to 0$.
   D'après ce qui précède, les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 0, donc, par recollement...
6. Deux suites u et w étant données, y a-t-il équivalence entre les deux propriétés $\lim\,(u_n-w_n)=0$ et $\lim\dfrac{u_n}{w_n}=1$?
   On essaiera les exemples suivants :
   a. $\begin{cases} u_n=\cos(n) \\ w_n=\cos(n)+\dfrac{1}{n}\end{cases}$ b. $\begin{cases} u_n=\dfrac{1}{n} \\ w_n=\dfrac{1}{n^2}\end{cases}$ c. $\begin{cases} u_n=n \\ w_n=n+\sqrt{n}\end{cases}$.
7. Y a-t-il un lien entre les deux propriétés $u_{n+1}-u_n\to 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\to 1$?
   * $u_n=n$ et $u_n=n^2$ vérifient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\to 1$ mais pas $u_{n+1}-u_n\to 0$
   * $u_n=2^{-n}$ c'est le contraire

3. Exercices utilisant la subtilité de la définition de $u_n\to\ell$ ou de $u_n\to+\infty$

1. (u_n) bornée et n'admet pas de suite extraite de limite $\ell\neq 0$, montrer que $u_n\to 0$.
   Réponse : supposons que $\exists\varepsilon>0$ tel que $\forall n_0,\exists n_1\geqslant n_0$ tel que $u_{n_1}\notin]-\varepsilon,\varepsilon[$. Alors, en posant $n_1=\varphi(n_0)$, on a une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ qui, étant bornée, doit avoir une valeur d'adhérence (BW) ce qui est contradictoire avec l'énoncé.
2. Césaro, montrer. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où $(u_n)\nearrow$.
3. Gendarmes, montrer.
4. Montrer que toute suite convergente est bornée.
5. Soient (u_n) divergente mais bornée, et (v_n) convergente vers $\ell\neq 0$. Prouver que $(u_n\times v_n)$ est aussi divergente bornée.
6. Une suite qui diverge vers $+\infty$ est-elle automatiquement croissante ? Si oui, le démontrer, si non, expliciter un exemple.
7. Pour $a>1$ montrer que $\lim\,(a^n)=+\infty$.
8. On suppose que $(u_{2n})\to\ell$ et $(u_{2n+1})\to\ell'$. Alors :
   a. si $(u_n)\nearrow$, montrer que $\ell=\ell'$;
   b. si $\ell=\ell'$, montrer que $(u_n)\to\ell$;
9. On considère une suite (u_n) vérifiant :

$$\forall\varepsilon>0,\forall n\in\mathbb{N},\exists p\geqslant n,|u_p|<\varepsilon.$$

Est-ce que cela veut dire que $\lim(u_n) = 0$?

10. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Mq $\lim(f(n)) = +\infty$.
11. Montrer qu'une suite dont toutes les suites extraites sont non-majorées, diverge vers $+\infty$
12. Deux suites (u_n) et (w_n), la première tend vers $\ell \neq 0$ et la seconde vers 0, prouver que leur produit converge vers 0.
13. Démontrer que si une suite diverge vers $+\infty$, son inverse converge vers 0.
14. (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ et telles que $u_n \times v_n \to 1$. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

    Si ce n'était pas le cas on aurait par exemple $u_n \nrightarrow 1$ donc une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ majorée par $\mu < 1$ donc $u_{\varphi(n)} \times v_{\varphi(n)} \leqslant \mu$ contradictoire avec l'hypothèse.
15. Unicité de la limite

    - soit par l'absurde en prenant $\varepsilon < \dfrac{|\ell - \ell'|}{3}$;

    - soit directement par inégalité triangulaire on a $|\ell - \ell'| \leqslant |\ell - u_n| + |u_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$...
16. Divergence de $(\cos n)$:

    a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, \left[2k\pi + \dfrac{\pi}{4}; 2k\pi - \dfrac{\pi}{4}\right] \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$.

    b. Montrer que la suite $(\cos n)$ ne converge pas vers 0.

    c. Montrer que la suite $(\cos n)$ ne converge pas.

4. Applications de Césaro.

1. D'alembert$\Rightarrow$Cauchy... si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell > 0$ alors $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.

   Réponse : passer au $\ln$ *et utiliser Césaro.*
2. On pose $v_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + \ldots + n\,u_n}{n^2}$.

   a. Si $u_n \to 0$, montrer que $v_n \to 0$.

   b. Si $u_n \to \ell$, déterminer $\lim(v_n)$. (Poser $u'_n = u_n - \ell$).

   c. Application : si $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{n} \to \ell$, déterminer $\lim \dfrac{u_n}{n^2}$.
3. On pose $u_{n+1} = \ln(u_n)$ et $u_0 > 0$.

   a. Étudier la suite *(décroissante minorée de limite 0).*

   b. Trouver la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ *(utilise un DL ordre 2 du* $\ln$*, on trouve* $\dfrac{1}{2}$*).*

   c. En déduire un équivalent de u_n *(par Césaro,* $u_n \sim \dfrac{2}{n}$*).*
4. On pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $u_0 \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   a. Étudier la suite *(décroissante minorée de limite 0).*

   b. Trouver la limite de $\dfrac{1}{(u_{n+1})^2} - \dfrac{1}{(u_n)^2}$ *(utilise un DL ordre 3 du* $\sin$*, on trouve* $\dfrac{1}{3}$*).*
5. Généralisation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) \leqslant x$ et $f \nearrow$ et $f(x) = x + a\,x^n + o(x^n)$...
6. $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$, déterminer limite de $(u_{n+1})^2 - (u_n)^2$ et en déduire la limite de (u_n).

5. Suites extraites

1. Si $u_{2n} \to 0$, peut-on affirmer que (u_n) est bornée ?
2. Si $u_{2n} \to 2$, peut-on avoir $u_{3n} \to 3$?

   Non, il suffit de regarder (u_{6n}) *pour comprendre que* (u_{2n}) *et* (u_{3n}) *ont forcément la même limite.*
3. Si (u_{2n}) et (u_{3n}) sont convergentes, (u_n) est-elle aussi automatiquement CV ?

   Réponse : non il suffit que (u_{6n+1}) *soit divergente.*
4. Théorème de recollement.
5. Soit u_n qui vaut 0 si n est composé et 1 si n est premier. Montrer que (u_n) diverge mais que toute suite extraite $(u_{kn})_n$ avec k un entier, converge.
6. Soit (u_n) une suite réelle telle que toute suite extraite de (u_n), si elle converge, converge vers 0. La suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ?

6. Applications de Bolzano-Weierstrass

1. Montrer qu'une suite d'entiers positifs $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ qui converge vers un irrationnel λ vérifie forcément $\lim(p_n) = \lim(q_n) = +\infty$.

si (p_n) avait une sous-suite bornée, cette sous suite aurait une sous-sous-suite convergente avec $p_n \to \ell$ et donc $q_n \to \dfrac{\lambda}{\ell}$ contradiction si ce sont des suites d'entiers.

2. Mq si $(u_n) \nearrow$ majorée alors (u_n) CV.

Remarque 2. on peut aussi utiliser la propriété de la borne supérieure.

3. (u_n) bornée vérifie : $\forall \alpha \neq 0, \exists \varepsilon > 0, \exists n_\alpha / \forall n \geqslant n_\alpha, u_n \notin]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$. Que dire de la convergence de (u_n) ?
   Supposons que $u_n \nrightarrow 0$ alors il existe une sous-suite hors d'un $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et (*) celle-ci devrait avoir des sous-suites convergentes mais l'énoncé l'empêche.
   Avec BL : on reprend à (*), on extrait un sous-recouvrement fini de $\bigcup_{\alpha \in [m,M] \setminus]-\varepsilon,\varepsilon[}]\alpha - \varepsilon_\alpha, \alpha + \varepsilon_\alpha[$ et à partir de $\max(n_\alpha)$ (qui existe puisque fini), la suite ne peut plus être nulle part...

7. Suites adjacentes

1. Le théorème : Si $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$ et $v_n - u_n \to 0$, montrer que (u_n) et (v_n) tendent vers la même limite.
   Démo rapide : (u_n) ne peut diverger vers $+\infty$ sinon $u_n - v_n \geqslant u_n - v_0 \to +\infty$. Or, une suite croissante soit diverge vers $+\infty$ soit converge.
   Cette démo utilise le principe $\nearrow$ majorée $\Rightarrow$ CV qui est pris comme axiome.
2. Montrer que les deux suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $w_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$ ont une limite commune.
3. $0 < v_0 < u_0$ et pour tout n :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$
   Montrer que les deux suites convergent vers la même limite.
   On trouve $u_n - v_n = \dfrac{1}{2}(\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}})^2$ positif, puis rapidement $(u_n) \searrow$ minorée donc CV vers a et $(v_n) \nearrow$ majorée donc CV vers b donc $a - b = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ d'où en posant $\lambda = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ si $b \neq 0$:
$$\lambda^2 - 1 = \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$
   Il y a plus rapide : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc $a = \dfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b$.
4. Étudier $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.
   Réponse :
   Méthode 1 : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \exp(f(n))$ où f est une fonction compliquée dont on établit, après un certain calcul... que $f''(x) = \dfrac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2} > 0$ dans $\mathbb{N}$. Donc $f' \nearrow$ et vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ on a $f' < 0$ donc $f \searrow$. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $f > 0$. Ainsi, (u_n) est croissante.
   Méthode 2 : on montre directement que $g : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ est croissante pour établir (u_n) croissante.
   De la même manière (v_n) décroît.
   Clairement, $u_n \to \mathrm{e}$ et $v_n \to \mathrm{e}$ aussi.
   Exemple $\left(\dfrac{11}{10}\right)^{10} < \mathrm{e} < \left(\dfrac{11}{10}\right)^{11}$.

8. Vers les séries usuelles

1. On pose $q_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$. On souhaite montrer de plusieurs manières que (u_n) CV.
   a. En montrant que les suites (q_n) et (w_n) définie par $w_n = q_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.
   b. En montrant que pour tout $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
   c. En montrant que $\dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.
2. On pose $h_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. On souhaite montrer de plusieurs manières que $(h_n - \ln(n))$ CV.
   a. En montrant que $\ln(n+1) < h_n < 1 + \ln(n)$ (par intégration ?)
   b. En montrant que $(h_n - \ln(n))$ et $(h_n - \ln(n+1))$ sont adjacentes.
3. si $|u_{n+1} - u_n| < \dfrac{1}{n}$ est-ce que (u_n) CV ? Même question avec $|u_{n+1} - u_n| < \dfrac{1}{n^2}$.

9. Suites « encadrées »

1. Autour d'un quart :
   a. Montrer que pour tout x réel, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
   b. Soit u_n une suite vérifiant :
      i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
      ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$.
   Montrer, par une astuce, que (u_n) est croissante. Quelle est alors sa limite ?
   Réponse : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1/4}{u_n(1-u_n)} > 1$ ou plus simple : $\begin{cases} u_n(1-u_n) \leqslant \frac{1}{4} \\ u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4} \end{cases}$ implique logiquement que $u_{n+1} > u_n$.
2. Deux suites (u_n) et (v_n) sont telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant v_n \leqslant 1$. On suppose que $u_n \times v_n \longrightarrow 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

10. Suites équivalentes et $o()$

1. À propos des équivalences :
   a. Donner deux suites équivalentes entre elles mais non convergentes.
   b. Donner deux suites équivalentes entre elles mais dont la différence ne tend pas vers 0.
   c. Donner deux suites non équivalentes entre elles mais dont la différence tend vers 0.
2. Si $u_n \sim v_n$, a-t-on :
   - $e^{u_n} \sim e^{v_n}$?
     non, prendre $u_n = n$ et $v_n = n + \sqrt{n}$
   - $\ln u_n \sim \ln v_n$?
     non, prendre $u_n = 1 + \frac{1}{n^\alpha}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^\beta}$ mais **oui** si $u_n \to \ell \neq 1$.
   - $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$?
     non, prendre $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ mais **oui** si $u_n \to \ell \neq 0$
3. A-t-on équivalence entre $u_{n+1} - u_n \to 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$?
4. Si $u_n \to +\infty$ et si $v_n = o(u_n)$ montrer que $u_n - v_n \to +\infty$.
5. Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, a-t-on automatiquement $u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$?
6. $u_n \sim v_n$ et (u_n) bornée montrer que (v_n) bornée (les suites sont supposées ne pas s'annuler)
   $|u_n| \leqslant M$ et $0,9 \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant 1,1$ donc $|v_n| \leqslant 1,1M$
7. On suppose que $u_n \sim 1 + u_n$, que dire de (u_n) ?
   On a $\frac{1+u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 1 \to 1$ donc $\frac{1}{u_n} \to 0$ donc u_n a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ ou un « mix des deux » style $(-1)^n \times n$.

11. Double récurrence

11.1. Théorie

On pose E l'ensemble des suites u vérifiant $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

1. Soit φ: $\begin{cases} E \to \mathbb{R}^2 \\ u \to (u_0, u_1) \end{cases}$. Montrer que φ est un isomorphisme d'e.v. et en déduire la dimension de E.
2. Trouver une base de E formée de suites géométriques.
3. En déduire le terme général de la suite de Fibonacci qui est la suite de E vérifiant $u_0 = u_1 = 1$.

11.2. Exercices

1. On définit la suite (u_n) par :
   - $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$
   - pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0$

   a) Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $n \in \{0; 1; 2\}$, $u_n = \alpha^n + \beta^n$ (indication : se souvenir de la méthode pour trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit).
   b) Montrer par récurrence que la formule est en fait valable pour tout $n \geqslant 0$.

2. Terme général de $\begin{cases} v_0=1 \\ v_1=3 \\ v_{n+2}=4v_{n+1}-4v_n \end{cases}$. *Réponse :* $v_n=2^n\left(1+\dfrac{n}{2}\right)$.
3. Terme général de $\begin{cases} u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \\ u_0=u_1=1. \end{cases}$ En déduire $\lim(u_n)$ et $\lim\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$
4. (Cas où $\Delta=0$). On donne $\begin{cases} v_0=a \\ v_1=b \\ v_{n+2}=2\mu\, v_{n+1}-\mu^2\, v_n \end{cases}$.
   a. Montrer que $v_n=\mu^n$ et $w_n=n\,\mu^n$ vérifient la relation de récurrence.
   Réponse : $v_n=a\,\mu^n+\left(\dfrac{b}{\mu}-a\right)n\,\mu^n$.
   On peut prendre des exemples en exercice avec $b=0$ *ou* $a=0$ *ou* $a=\dfrac{\mu}{2}$ *et* $b=\mu^2$.
5. (Cas où $\Delta<0$).
   a. $u_{n+2}=2u_{n+1}-3\,u_n$: on trouve $u_n=\alpha\big(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\big)^n+\beta\big(1-\mathrm{i}\sqrt{2}\big)^n$.
      i. Avec $\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=1 \end{cases}$ cela donne $\begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$.
      ii. Avec $\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=2 \end{cases}$ cela donne $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \beta = \frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$.
   b. $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$: on trouve $u_n=\alpha\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}+\beta\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\pi}{3}}$.
6. (Comparaison Fibo et Arithmético-Géométrique)
   On pose :
$$\begin{cases} w_{n+2}=3w_{n+1}-2w_n \\ u_{n+1}=3u_n-2. \end{cases}$$
   Déterminer laquelle des deux domine l'autre.
   On trouve :
$$\begin{aligned} u_n &= 1+3^n(u_0-1) \\ w_n &= (2\,w_0-w_1)+2^n(w_1-w_0). \end{aligned}$$
   donc :
   - *si* $\begin{cases} u_0>1 \\ w_1>w_0 \end{cases}$: $u_n\gg w_n$.
   - *etc.*
7. Terme général de $u_{n+1}=a\,u_n+b\,u_{n-1}$ et $\left\{\begin{smallmatrix} u_0=c \\ u_1=d \end{smallmatrix}\right.$ avec :
   a. $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=2 \\ d=-3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=-1 \\ d=0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$ et on peut en inventer d'autres...

12. Divers

12.1. Petites limites concrètes

1. Donner la limite des suites :
   a. $u_n=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$
   b. $u_n=\sqrt{n^2+2n+4}-n$
   c. $u_n=\binom{n}{5}$
   d. $u_n=(n+1)^a-(n-1)^a$, discuter suivant les valeurs de a.

a	$\lim(u_n)$	
$a<0$	0	par différence
0	0	constante
1/2	0	*par expression conjuguée*
1	2	*stationnaire*

   à finir... On peut prendre $a\in\left\{-\dfrac{1}{2};0;1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$.

2. $\lim\limits_n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{-2n}$ 3. $\lim\limits_n\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{+2n}$ 4. $\lim\limits_n\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{-n/4}$ 5. $\lim\limits_n\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-n^2}$

6. $\lim\limits_{n}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{+2n}$ 7. $\lim\limits_{n}\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)^{-2n}$ 8. $\lim\limits_{n}\left(1-\dfrac{2}{n^\alpha}\right)^{+2n^\beta}$ discuter suivant α, β.

9. $(u_n)\nearrow$ et $(u_n)^2$ converge, est-ce que (u_n) converge ?
si $\exists n_0 / u_{n_0} > 0$ alors $u_n > 0$ pour $n \geqslant n_0$, tandis que si un tel n_0 n'existe pas, cela veut dire que $u_n \leqslant 0$ pour tout n. Et à signe constant, la convergence de $(u_n)^2$ est équivalente à celle de (u_n).

13. Suites solutions d'équations

Section à terminer

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle u_n l'unique solution réelle de l'équation :

$$\boxed{x^3 + 5x - n = 0}.$$

.

a. Prouver que la définition est cohérente.
b. Prouver que $u_n \geqslant 0$.
c. Prouver que $u_n \leqslant \sqrt[3]{n}$.
d. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.
e. Trouver un équivalent de u_n.

Réponse :

- Si $f(x) = x^3 + 5x - n$, alors $f(0) = -n < 0$ et $f(\sqrt[3]{n}) = n + 5\sqrt[3]{n} - n = 5\sqrt[3]{n} > 0$ d'où l'encadrement.
- On divise par n dans $(u_n)^3 + 5\,u_n - n = 0$ et on obtient $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 + 5\,\dfrac{u_n}{n} - 1 = 0$ donc $\boxed{u_n \sim \sqrt[3]{n}}$.

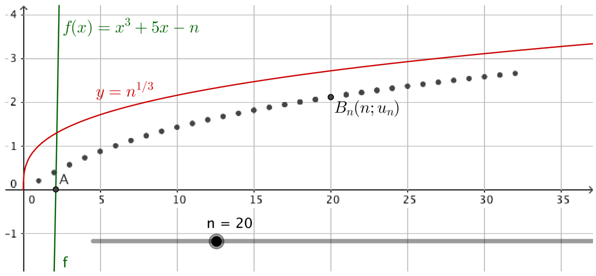

Figure 1.

2. (*ouverte*) On appelle u_n l'unique solution de $\boxed{x^n = x + n}$.

a. Montrer que la définition a un sens.

Variations de $f_n(x) = x^n - x - n$ sur $[1; +\infty[$: on a $\begin{array}{|c|ccc|}\hline x & 1 & u_n & +\infty \\ \hline f_n & -n & \nearrow & +\infty \\ \hline\end{array}$.

b. Montrer que $u_n \to 1$.

Réponse : Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\lim\limits_{n} f_n(1+\varepsilon) = \infty$, donc à partir d'un certain rang $u_n \in]1; 1+\varepsilon[$.

c. Monotonie ? non résolu

Montrer que $u_{n+1} < u_n$ revient à montrer que $f_n(u_{n+1}) < 0$, ce qui amène à $r(u_{n+1}) < 0$ avec $r(x) = -x^2 + (1-n)x + (n+1)$ mais au final cela amène à montrer que $u_{n+1} > \frac{1}{2}\left(1 - n + \sqrt{(n+1)^2 + 4}\right)$ et là on n'en sait rien...

3. Pour $n \geqslant 3$, on appelle u_n l'unique solution dans $]0, 1[$ de l'équation :

$$\boxed{x^n + 1 = n\,x}$$

a. Montrer que (u_n) est bien définie.
b. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$.
c. Déterminer $\lim\,(u_n)$ puis $\lim\,(u_n)^n$, et en déduire un équivalent simple de u_n.

Réponse :

a) si $f_n(x) = x^n + 1 - n\,x$ alors $f_n'(x) = n\,(x^{n-1} - 1)$, croissant de $-n$ vers $+\infty$ d'où $f \searrow \nearrow$ avec un min en $x = 1$ et $f(1) = 2 - n < 0$ et $f(0) = 1 > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ donc f_n s'annule deux fois, une fois dans $]0, 1[$ et une fois dans $]1; \infty[$.

b) $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right) < 0$ donc $u_n \in \left]0; \dfrac{2}{n}\right[$.

c)

à terminer

14. Suites avec sommes

1. On pose pour $n \geqslant 1$:
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$
montrer que (u_n) est croissante et majorée.

   Montrer ensuite que pour tout $x > 1$ on a $\ln\frac{x+1}{x} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \ln\frac{x}{x-1}$, en déduire la limite de (u_n).

   $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0.$

   $u_n \leqslant \frac{n}{n+1} < 1.$

   $\ln\frac{x+1}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ se prouve par $\ln(1+a) \leqslant a$ (concavité du ln) et $\frac{1}{x} \leqslant \ln\frac{x}{x-1}$ par $-a \geqslant \ln(1-a)$ ce qui revient au même.

   On en déduit $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$ donc $\lim(u_n) = \ln(2)$.
2. On pose :
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+n+k}$$
majorer et minorer (u_n). En déduire sa limite, puis montrer qu'elle est équivalente à une suite de la forme $w_n = \frac{k}{n}$ avec un certain $k \in \mathbb{R}$.
3. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^5$ et $v_n = n^7$, montrer que (v_n) domine (u_n).

15. Divers

1. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x - f(x)) = x$, et soit une suite définie par la donnée de u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) est arithmétique et en déduire f.
2. Montrer que la suite $u_n = n + (-2)^n$ n'a pas de limite.
3. On suppose démontrée l'existence de la partie entière d'un réel.

   Démontrer que pour tous réels $x < y$ il existe un $a = \frac{p}{2^n}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, tel que $x < a < y$.
4. Si (u_n) bornée, est-ce que $\{u_n\}$ admet un sup ? un max ?

   Un sup oui, comme toute partie majorée de $\mathbb{R}$; un max, pas forcément : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.
5.
6. Étudier la suite :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + a}{b\,u_n - 1}$$
indications : $f \circ f(x)$. (on trouve (u_{2n}) et (u_{2n+1}) constantes).
7.
8. Montrer que les deux suites $u_n = \left\lfloor \left(5n - \frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor$ et $v_n = \left\lfloor \left(4n + \frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor$ vérifient $u_n \sim \alpha v_n$ avec un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Convergent-elles ?
9. On pose $\overline{\lim}(u_n) = \inf_n \left(\sup_{k \geqslant n} u_k \right)$. Trouver $\overline{\lim}(u_n)$ pour les suites suivantes :
   - $u_n = (-1)^n$
   - $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
   - $u_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ pair} \\ 2^{-n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
   - et une ou deux autres
10. Si $(u_n)^2$ et $(u_n)^3$ CV, Mq u_n CV.
11. Donner la limite des suites :

    a. $u_n = \lfloor n \rfloor$

    b. $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 4} - n$

    c. $u_n = \binom{n}{5}$

    d. $u_n = (n+1)^a - (n-1)^a$ suivant les valeurs de $a \in \left\{-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.