Séries

Table des matières

1. Études de cas concrets

1.1. Avec des DL

Étudier la nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$; réponse : $u_n \sim \frac{-1}{12\,n\,\sqrt{\mathrm{e}}}$ donc $\sum u_n$ DV.
2. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; réponse : on remarque que $u_n \to 0$, puis $u_n \sim \frac{\mathrm{e}}{2n}$ donc $\sum u_n$ DV.
3. $u_n = \frac{1}{n-\sqrt{n}}$; réponse : $u_n \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum u_n$ DV. Réponse plus rapide avec une expression conjuguée, on a tout de suite l'équivalent.

4. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$; réponse : $u_n \sim \dfrac{1}{n\ln n}$ Bertrand $\Rightarrow \sum u_n$ DV.

5. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^a}$, discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Réponse : déjà le DL de u_n :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) &= -\frac{2}{n} - \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
\text{donc } n^\alpha \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) &= -2n^{\alpha-1} - \frac{2}{3}n^{\alpha-3} + o(n^{\alpha-3})\\
\text{donc } u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^a} &= \mathrm{e}^{-2n^{\alpha-1}} \times \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}n^{\alpha-3}+o(n^{\alpha-3})}.
\end{aligned}$$

   Donc si $\alpha \leqslant 1$, $u_n \nrightarrow 0$: DV grossière. Supposons maintenant $\boxed{\alpha > 1}$.

   À partir d'un certain rang, on a : $u_n < \mathrm{e}^{-2n^{\alpha-1}}$.

   Or, pour tout $k > 0$, on peut toujours majorer $n^k > \ln n$ à partir d'un certain rang.

   Ainsi, à partir d'un certain rang, $u_n < \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n$ CV.

1.2. Avec d'autres critères

Étudier la nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n^k}{(n-1)!}$;

   Réponse : $n^2 u_n = \dfrac{n^{k+3}}{n!} \to 0$ quelle que soit la valeur de $k \in \mathbb{R}$. Ainsi $\sum u_n$ CV. On pouvait aussi utiliser d'Alembert (ou sûrement aussi Cauchy avec Stirling).

2.

1.3. Méthode télescopique

On la retrouve aussi dans le paragraphe « 6.1 série harmonique ».

1. La suite $u_n = (\sum_{k=1}^n \ln k) - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln n + n$ admet-elle une limite finie ?

   Réponse : oui car $u_{n+1} - u_n \sim \dfrac{1}{4n^2}$. *Remarque : la comparaison avec une intégrale ne donne rien.*

2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=20}^{40} \frac{1}{i(i+1)}$.

3. Déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} k^3$ en trouvant un polynôme P de degré 4 vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x+1) - P(x) = x^3.$$

4. Déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} k^4$ en trouvant un polynôme P de degré 4 vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x+1) - P(x) = x^4.$$

1.4. Séries alternées sans utiliser les critères des séries alternées

On demande la nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. Une suite qui fournit des contre exemples intéressants

   a. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

      Réponse : $u_n + u_{n+1} = \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ donc $\sum u_n$ CV <u>ssi</u> $\alpha > 1$.

Remarque : pour $\alpha = 1/2$ on peut utiliser une expression conjuguée.

b. On prend désormais $\boldsymbol{\alpha = 1/2}$.

i. Montrer que $\sum u_n$ CV mais que $\sum \ln(1+u_n)$ DV.

ii. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_n + \dfrac{1}{n}$. Montrer que $v_n \sim w_n$ mais que $\sum v_n$ CV alors que $\sum w_n$ DV.

2. Critères usuels

2.1. Présentation

Pour tous ces critères, on exibe un réel ℓ et :

- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge ;
- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge ;
- si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Calcul du ℓ :

(D'Alembert) ℓ est la limite éventuelle de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

(Cauchy) ℓ est la limite éventuelle de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$.

(Raabe Duhamel) ℓ est le coefficient éventuel dans $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\ell}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Remarque : Les séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ sont un exemple typique où $\ell = 1$ pour d'Alembert de Cauchy tandis que $\ell = \alpha$ pour Raabe-Duhamel.

2.2. Démonstration

2.2.1. d'Alembert dans le cas $0 \leqslant \ell < 1$

- Démonstration rapide :
  À partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell' < 1$ avec un certain $\ell' \in]\ell; 1[$, soit $u_n < k(\ell')^n \times u_N$, et on somme.
- Démonstration détaillée :
  Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$, alors à partir d'un certain rang n_0 on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon$ qui implique $u_{n_0+k} \leqslant u_{n_0} \times (\lambda+\varepsilon)^k$, terme général d'une série (géométrique) convergente.

2.2.2. Cauchy dans le cas $0 \leqslant \ell < 1$

- Démonstration rapide : À partir d'un certain rang, $(u_n)^{1/n} < \ell'$ avec un certain $\ell' \in]\ell; 1[$, soit $u_n < (\ell')^n$, et on somme.
- Démonstration détaillée : Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$, alors à partir d'un certain rang n_0 on a $u_n < (\ell + \varepsilon)^n$ dont la série CV.

2.2.3. Raabe-Duhamel dans le cas $0 \leqslant \ell < 1$

À partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \dfrac{\ell'}{n} < 1$ avec un certain $\ell' \in]\ell; 1[$, soit $u_n < u_N \times \prod_N^{n+1} \left(1 - \dfrac{\alpha'}{n}\right)$

et le produit diverge vers 0 (son ln diverge vers $-\infty$).

2.2.4. Raabe-Duhamel dans le cas $\ell > 1$

- On pose $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$, on a vu que (v_n) vérifie le critère de Raabe-Duhamel avec le coefficient égal à β.
- On prend $1 < \beta < \alpha$ et on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang N

En effet cela revient à dire que dans un certain voisinage $]-\varepsilon;\varepsilon[$ de 0 on a $1-\alpha\,x+o(x)\leqslant 1-\beta\,x+o'(x)$, ce qui revient à dire qu'il existe un tel voisinage tel que $o(1)\leqslant\alpha-\beta$ ce qui est évident.

On peut aussi procéder en disant qu'il existe un tel voisinage tel que $1-\alpha\,x+o(x)\leqslant 1-\gamma x\leqslant 1-\beta\,x+o'(x)$ avec γ dans $]\beta;\alpha[$ (cela évite trop de o...)

- Puis multiplication télescopique et critère comparaison des séries

2.3. Comparaison

1. **d'Alembert $\Rightarrow$ Cauchy**

   Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite finie ℓ, alors $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ a aussi une limite finie et c'est ℓ aussi.

   Autrement dit : Si d'Alembert permet de conclure, alors Cauchy aussi.

   Démonstration, première rédaction :

   À partir d'un certain rang n_0 on a $\ell-\varepsilon\leqslant\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\ell+\varepsilon$ donc pour tout $n=n_0+k$:

$$(l-\varepsilon)^k\times u_{n_0}\leqslant u_n\leqslant(l+\varepsilon)^k\times u_{n_0}$$
$$\Leftrightarrow\quad \underbrace{(l-\varepsilon)^{\frac{k}{n}}}_{\to\ell-\varepsilon}\times\underbrace{(u_{n_0})^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}\leqslant(u_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\underbrace{(l+\varepsilon)^{\frac{k}{n}}}_{\to\ell+\varepsilon}\times\underbrace{(u_{n_0})^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}.$$

   Démonstration, seconde rédaction :

   Écrire d'Alembert entre $N(\varepsilon)$ et n : $(\alpha-\varepsilon)^{n-N}\leqslant\dfrac{u_{n+1}}{u_{N(\varepsilon)}}\leqslant(\alpha+\varepsilon)^{n-N}$ avec $\alpha+\varepsilon<1$ ou $\alpha-\varepsilon>1$ suivant le cas, et sommer.

2. **Cauchy $\not\Rightarrow$ d'Alembert**

   Il suffit de prendre $u_n=b^{(-1)^n-n}$ avec $b>0$ quelconque.

   Alors Cauchy nous donne un $\ell=\dfrac{1}{b}$ tandis que d'Alembert alterne entre b et $\dfrac{1}{b^3}$.

3. Raabe Duhamel n'a de sens que lorsque $\alpha=1$ pour d'Alembert.

2.4. Applications

suite	d'Alembert	Cauchy	Raabe-Duhamel
$u_n=\dfrac{x^n}{n!}$	$\ell=0$	$\ell=0$ par Stirling	
$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^k}$	$\ell=1$	$\ell=1$	
$u_n=\dfrac{1}{x^n+\dfrac{1}{x^n}}$	$\begin{cases}\ell<1 & \text{si } x\neq 1\\ \ell=1 & \text{si } x=1\end{cases}$		
$u_n=\dfrac{n!}{n^n}$	$\ell=\dfrac{1}{e}$		
$u_n=\dfrac{n^k}{z^n}$ (avec $z\in\mathbb{C}$)	$\ell=\dfrac{1}{z}$		
$u_n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	long... $\ell=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\ell=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	
$u_n=\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$	voir...	$\ell=0$	
$u_n=\left(\dfrac{2n+1}{3n+4}\right)^n$		$\ell=\dfrac{2}{3}$	
$u_n=\left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right)^n$		$\ell=1$	
$w_n=\dfrac{1}{n\ln^\beta n}$ (BERTRAND)	$\ell=1$	$\ell=1$	$\ell=1$
$u_n=\dfrac{1}{n^\beta}$ (RIEMANN)	$\ell=1$	$\ell=1$	$\ell=\beta$
$u_n=\dfrac{2^{(-1)^n}}{2^n}$	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ alterne entre $1/4$ et 1	$\ell=\dfrac{1}{2}$	X

3. Petits exercices théoriques

1. Trouver une suite (u_n) telle que $(n\,u_n)$ ne tende pas vers 0 mais pourtant $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. Avec la moyenne géométrique
   a. Comparer moyenne arithmétique et moyenne géométrique de deux réels a, b positifs.
   Réponse : $\sqrt{a\,b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ en élevant au carré.
   b. Si la série de terme général (u_n) converge, que dire de la série de terme général $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$?
   Réponse : on prend $a = u_n$ et $b = \dfrac{1}{n^2}$.
   c. Soit (u_n) à termes strictement positifs. Montrer que parmi les deux séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{u_n}$, l'une au moins diverge.
   Réponse : on prend $a = u_n$ et $b = \dfrac{1}{u_n}$ d'où $u_n + \dfrac{1}{u_n} \geqslant 2$ et donc $\sum \left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ diverge. Il n'est donc pas possible que $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{u_n}$ convergent toutes les deux.

4. Calculs effectifs

1. Des sommes alternées
   a. Prouver que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$. (Écrire $\dfrac{1}{k}$ sous forme d'une intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$).
   Réponse :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^{k-1} t^{k-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1})\,\mathrm{d}t \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.
\end{aligned}$$
   b. Prouver que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

5. Produits de Cauchy de séries

Donner la valeur exacte de la somme puis effectuer le produit de séries :

1. $A = (\sum 2^{-n})^2$. Réponse : $A = 4 = \sum (n+1)\,2^{-n}$ (on peut retrouver ça avec un DSE).
2. $B = \left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)\left(\sum \dfrac{1}{n!}\right)$. Réponse : $B = \dfrac{\mathrm{e}\,\pi^2}{6} = \sum_{p\geqslant 1} \dfrac{1}{p^2\,(n-p)!}$.

6. Séries de Riemann

6.1. La série harmonique

Pour totu $n \in \mathbb{N}$, on pose $\boxed{H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}}$.

6.1.1. Divergence de la série harmonique, plusieurs méthodes

1. Il est facile de montrer que $H_{2n} - H_n > \dfrac{1}{2}$ d'où $H_{2^n} > 1 + \dfrac{n}{2}$.

2. On peut aussi voir que $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln(n)$ d'où, par télescopage, H_n de même nature que $\ln n$.
3. Voir aussi Mengoli : $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}$ d'où$H_{3n+1} > 1 + 3H_n$: très joli.
4. Évidemment, on peut comparer la série à une intégrale.

6.1.2. Équivalent

1. Montrer que $u_n = H_n - \ln n$ a une limite finie γ.
   Réponse : $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ puis par télescopage on a (u_n) de même nature que $\sum \frac{1}{2n^2}$ donc CV.

6.2. La somme des inverses des carrés

1. Calcul effectif de la somme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$
   a. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (a\,t^2 + b\,t)\cos(n\,t)\mathrm{d}t$.
   b. Montrer que pour tout $t \in]o;\pi]$, on a :
   $$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\,t) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$
   c. Montrer que si g est une fonction C^1 sur $[a,b]$, alors :
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b g(t)\sin(n\,t)\mathrm{d}t = 0$$
   (lemme de LEBESGUE).
   d. En déduire la valeur de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Équivalent d'un reste
   Pour $n > 0$ on pose :
   $$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
   Étudier la convergence de (R_n) et en donner un équivalent (exercice 15).
3.

7. SÉRIES DE BERTRAND

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ étant donnés, on pose pour tout $n \geqslant 2$:
$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$
On s'intéresse à la série $V_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$.

1. Pour $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ montrer que V converge.
2. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 2$ montrer que V diverge.
3. Si $\alpha < 1$ montrer que V diverge.
4. Si $\alpha > 1$ montrer que V converge.
5. On suppose $\alpha = 1$:
   a. Si $\beta \leqslant 0$ montrer que V diverge.
   b. En comparant avec une intégrale, montrer que si $\beta > 1$, alors V converge.

c. Si $\beta = 1$ montrer que V diverge.

d. Que conclure si $0 < \beta < 1$?

6. Faire un schéma récapitulatif des différents cas.

8. Séries alternées

8.1. Critères

8.1.1. Égalité d'Abel

On pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n$ et $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$. Alors :

$$S_N = a_N B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n).$$

8.1.2. Application : critères d'Abel

- Si $a_n \to 0$ et (B_n) bornée et $\sum_{n \geqslant 0} |a_{n+1} - a_n| < +\infty$ alors $\sum a_n b_n$ CV.
- Si $a_n \searrow 0$ et (B_n) bornée alors $\sum a_n b_n$ CV.

  Remarque : en utilisant les mesures on peut écrire Abel et IPP sous une même forme.

8.1.3. Critères de Leibniz

Si $|u_n| \searrow 0$ (et (u_n) alternée) alors $\sum u_n$ converge (les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes).

8.1.4. Abel généralisé

Pour $x > 0$, on pose $N = \lfloor x \rfloor$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi(n)$ et $A(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Alors :

$$\begin{aligned} S(x) &= A_N \varphi(N) - \int_1^N A(t) \varphi'(t) \mathrm{d}t \\ &= A(x)\, \varphi(x) - \int_1^x A(t) \varphi'(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$