Intégrales doubles et triples

Table des matières

1. Intégrales doubles

1.1. Divers

Un lien utile pour calculer numériquement en ligne des intégrales du type $\int_a^b \int_{\varphi(u)}^{\psi(u)} f(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$:

http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=f5f3cbf14f4f5d6d2085bf2d0fb76e8a.

1.2. Sans polaires ni changements de variables

Les réponses détaillées et manuscrites sont à télécharger dans le dossier `scans` *en haut à gauche de l'écran.*

0) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans la zone délimitée par $O(0,0), A(1,2), B(2,1), C(4,0)$.

Réponse : si l'on divise en trois de gauche à droite on a :

$I_1 = \dfrac{4}{15}\left(\dfrac{34}{3} - 4\sqrt{2}\right)$, $I_2 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\right)$, $I_3 = \dfrac{4}{15}\left(25\sqrt{5} + 9\sqrt{3}\right) - \dfrac{256}{15}$.

1) $\displaystyle\iint_D (x+2y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans la zone délimitée par $O(0,0), A(1,1), B(2,-1)$.

Réponse ; si l'on divise en deux de la gauche vers la droite on a :

$I_1 = \dfrac{11}{16}$, $I_2 = \dfrac{21}{16}$ d'où $I = 2$.

2) $\displaystyle\iint_D |x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans le rectangle $O(0,0), A(4,0), B(4,2), C(0,2)$.

Réponse : si l'on divise en deux en traçant $y = x$ on obtient une petite et une grande zone et :

$I_1 = \dfrac{4}{3}$, $I_2 = \dfrac{28}{3}$ d'où $I = \dfrac{32}{3} \approx 10{,}67$.

3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pour $D\colon \begin{cases} x+y \leqslant 3 \\ x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1. \end{cases}$

Réponse : $I = -\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{3}{2} \approx 0{,}072$.

4) $\displaystyle\iint_D (3x+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans $D\colon \begin{cases} y \geqslant x^2 \\ x \geqslant 0 \\ y \leqslant \sqrt{x}. \end{cases}$

Réponse : $I = \dfrac{3}{4}$.

5) $\displaystyle\iint_D \frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans $D\colon \begin{cases} y \leqslant \dfrac{x^2}{2} \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Réponse : il est plus simple d'intégrer par $\int_y \int_x \ldots \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ que par $\int_x \int_y \ldots \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On trouve :

$I = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{3} + 1 \approx 0{,}340$.

6) $\displaystyle\iint_D x^2\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $D\colon \begin{cases} y \geqslant 1/x \\ y \leqslant 5-4x \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Réponse : on trouve les points d'intersection aux abscisses $1/4$ et 1 puis :
$I = \frac{0,8}{3} + \frac{10,3}{128} - \frac{1}{6 \times 64} \approx 0,345$.

7) $\iint_D \ln(1+x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec D: $\begin{cases} x+y \leqslant 4 \\ x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$

rappel : $\int \ln(k+x)\,\mathrm{d}x = (k+x)\ln(k+x) - k - x$. On trouve :
$I = -2,5\ln 5 + 4,5\ln 3 + 2 \approx 1,920$.

8) $\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans le losange $|x| + |y| \leqslant 1$.

Réponse : on divise en deux, on trouve $I = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

1.3. Passage en polaires

Les réponses détaillées et manuscrites sont à télécharger dans le dossier **scans** *en haut à gauche de l'écran.*

1) $\iint_D \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec D le cercle de centre O de rayon 3.

On trouve $I = \frac{225\pi}{64} \approx 11{,}045$.

2) $\iint_D \frac{1}{x^2 + x\,y + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $D \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant x \\ 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16. \end{cases}$

On trouve $I = \frac{\pi \ln 2}{3\sqrt{3}}$.

3) $\iint_D \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec D: $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0. \end{cases}$

On trouve $I = \pi - \sqrt{2}$.

4) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1 \\ x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0. \end{cases}$

Il faut travailler pour paramétrer les polaires, plusieurs méthodes ; finalement on trouve :
$I = 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right)$.

5) $\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec D: $\begin{cases} x^2 + y^2 - x \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 - y \geqslant 0. \end{cases}$

Réponse : on sépare en $y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ et l'on trouve :
$I_1 = \frac{1}{8}$ et $I_2 = \frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{0} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{8 + 3\pi}{128}$.

6) $\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec D: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ y \geqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$

On sépare en une grosse part de camembert et un triangle isocèle ; on trouve :
$I_1 = \frac{\pi}{3}$ et $I_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Attention, pour I_2, afin d'éviter des bornes infinies, on doit passer non pas par $\tan\theta$ comme Bioche le suggèrerait, mais par $\operatorname{cotan}\theta$.

o) $\iint_D \mathrm{aa}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

o) $\iint_D \mathrm{aa}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

o) $\iint_D \mathrm{aa}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

1.4. Changement de variable (jacobien)

1. $\iint_D \frac{x\sqrt{x^2 + x\,y}}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec D: $\begin{cases} 1 \leqslant x\,y \leqslant 2 \\ 1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 2. \end{cases}$

   Réponse : Le domaine D ne permet pas un saucissonnage en x et y :

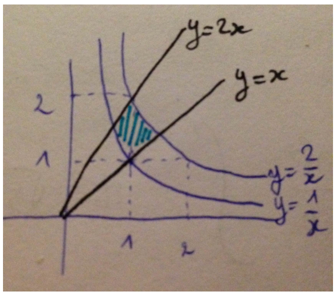

Figure 1. Le domaine D.

On pose donc $\begin{cases} u = x\,y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ alors $J = \dfrac{1}{v}$ donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \times \int_1^2 \frac{1}{4v^2}\sqrt{1+\frac{1}{v}}\,\mathrm{d}v \\ &= \left[\frac{2}{3}\,u\,\sqrt{u}\right]_1^2 \times \left[-\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \left(1+\frac{1}{v}\right)\sqrt{1+\frac{1}{v}}\right]_1^2. \end{aligned}$$

2. Intégrales triples

2.1. Sans polaires ni changements de variables

Réponses détaillées dans le dossier `scans` *(en haut à gauche de la page web).*

Dans le paraboloïde $V : 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2$

1. $I_1 = \displaystyle\iiint_V z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
   Réponse : on procède par tranches : $I = \dfrac{\pi}{12}$.
2. $I_2 = \displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
   Réponse : on procède par piles : $I = \dfrac{\pi}{6}$.
3. $I_3 = \displaystyle\iiint_V x^2\,y\,z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
   Réponse : nul par symétrie d'axe (Oxz) et $f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$.
4. $I_4 = \displaystyle\iiint_V x^2\,y^2\,z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Faire par tranches et recommencer par piles.
   Réponse : les deux utilisent $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ \sin^2\ \theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$ et les piles utilisent $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta \sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{60}$. On trouve à la fin $I_4 = \dfrac{\pi}{480}$.

Dans l'hémisphère D: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ z \geqslant 0. \end{cases}$

1. $I_5 = \displaystyle\iiint_V x^2\,y^2\,z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Un bon entraînement consiste à rédiger le calcul par tranches puis à le recommencer par piles.
   Réponses : $I_5 = \dfrac{2\pi}{945}$. Utilise $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$.

Divers

1. Gouttière V: $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z \leqslant 1+y^2. \end{cases}$ Coordonnées du centre d'inertie G de V, et moment d'inertie suivant l'axe (Oz).

2.2. Avec coordonnées cylindriques ou sphériques

1. Cornet $V\colon\begin{cases}\frac{z^2}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\\ z\geqslant 0.\end{cases}$ On prend la densité $f(x)=|xy|$. Masse, centre d'inertie, moment d'inertie suivant l'axe (Oz).
2. Tabouret $V\colon\begin{cases}y^2+1\geqslant x^2+z^2\\ -1\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$ Calculer $I_{\text{tabouret}}=\iiint_V (x-y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ par tranches puis en cylindriques (selon (Oy)).