1. Sommes de Riemann

$A=\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k-\ln n)\right)$	$B=\lim\limits_n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n^{a+1}}{n^a+k^a}\right)$
$C=\lim\limits_n\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n}{(k-2n)^2}\right)$	$D=\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{n+k}\right)$
$E=\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}(\ln k+2-\ln n)\right)$	$F=\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\right)$
$G=\lim\limits_n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}\right)$	$H=\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=0}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor\right)$
$I=\lim\limits_n\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k^2}{8k^3+n^3}\right)$	$J=\lim\limits_n\left(\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\dfrac{1}{2k+1}\right)$
$K=\lim\limits_n\left(n\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{-n/k}}{k^2}\right)$	$L=\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{4k+n}\right)$
$M=\lim\limits_n\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\tan\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$	$N=\lim\limits_n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left[\left(\dfrac{n}{n+k}\right)^{1/n}\right]\right)$
$O=\lim\limits_n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}\right)$	$P=\lim\limits_n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k^2}\right)$
$Q=\lim\limits_n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}\right)$	$R=\lim\limits_n(A_n)$ avec $A_n=\left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n}$
$S=\lim\limits_n\left(2n^2\times\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{8(k-n)^3-n^3}\right)$ (long...)	Équivalent en $+\infty$ de $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$
limite en $+\infty$ de $U_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{k}\times\dfrac{1}{2n-k}\right)$	

Réponses partielles :

- $C_n=\dfrac{1}{n}\sum\dfrac{1}{\left(-2+\frac{k}{n}\right)^2}\longrightarrow\displaystyle\int_{-2}^{-1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}=\dfrac{1}{2}.$
- $D_n=\dfrac{1}{n}\sum\sqrt{\frac{k}{n}+1}\longrightarrow\displaystyle\int_1^2\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right).$
- $E_n=\dfrac{1}{n}\sum\ln\left(\dfrac{k\,\mathrm{e}^2}{n}\right)\longrightarrow\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}^2}\ln t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^2.$
- $F_n=\dfrac{1}{n}\sum\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\sin\left(\pi\dfrac{k}{n}\right)\longrightarrow\displaystyle\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{4}{\pi^3}.$
- $G_n=\dfrac{1}{n}\sum\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\longrightarrow\displaystyle\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin(1)=\dfrac{\pi}{2}.$

  Mais normalement, Riemann ne s'applique pas si $\lim\limits_b f=+\infty$.

- pour H on encadre :

$$\sqrt{k}-1 \leqslant \lfloor \sqrt{k} \rfloor \leqslant \sqrt{k}$$
$$\text{d'où } \left(\frac{1}{n}\sum \sqrt{\frac{k}{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant H_n \leqslant \frac{1}{n}\sum \sqrt{\frac{k}{n}},$$

or $\frac{1}{n}\sum \sqrt{\frac{k}{n}} \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$ donc $H = \frac{3}{2}$.

- $I_n = \frac{1}{n}\sum \frac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3} \longrightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{1+8x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 3}{12}$.

- $J_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{1+2(j+n)} = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{2+\frac{1+2j}{n}}$.

  C'est une subdivision de pas $\frac{2}{n}$ qui a pour limite $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2+x} = \frac{\ln 2}{2}$.

- $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-n/k}}{(k/n)^2} \longrightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (prolongeable en 0) donc $K = \frac{1}{e}$.

- $L = \int_0^1 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(5^{3/2}-1) \approx 1,6967$.

- $M = \lim_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right)\right) = -\ln(\cos 1)$

- $N = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left[\left(\frac{n}{n+k}\right)^{1/n}\right]\right) = 1 - 2\ln 2$

- $O = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

- $P = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}\right) = \frac{\ln 2}{2}$

- $Q = \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}\right) = \sqrt{3}-1$

- R) On trouve $\ln A_n = \frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ d'où : $\lim_n(\ln A_n) = 2\ln 2 - 1$ d'où $R = \lim_n(A_n) = \frac{4}{e}$.

  Stirling marche aussi.

- $S_n = 2n^2 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8(k-n)^3 - n^3} = \frac{2}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8\left(\frac{k}{n}-1\right)^3 - 1} = \frac{2}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{2k}{n}-2\right)^3 - 1}$.

  On reconnaît $a = -2$ et $b = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$ après c'est une décomposition en éléments simples et c'est long...

- $T_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = n\sqrt{n}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)}_{\to 2/3}$ donc $T_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$.

- $U_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k} \times \frac{1}{2n-k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\frac{k}{n}\left(2-\frac{k}{n}\right)}\right)$ a pour limite $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(2-x)} = \infty$.

Pour la démonstration rigoureuse on peut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a :

$$U_n \geqslant V_n(\varepsilon) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\left(\frac{k}{n}+\varepsilon\right)\left(2-\frac{k}{n}\right)}\right),$$

qui a pour limite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+\varepsilon)(2-x)}$ qui peut être rendu aussi grand qu'on veut en faisant varier ε et que donc pour tout $M > 0$ donné il y a un rang à partir duquel on a $U_n \geqslant M$.