Inégalités, Min et Max, Inéquations

1. En étudiant des variations

1. Monter que pour tout $x \geqslant 0$ on a :
$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x.$$
Réponse : en étudiant $x \mapsto \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ puis $x \mapsto \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ puis $x \mapsto x - \sin x$...

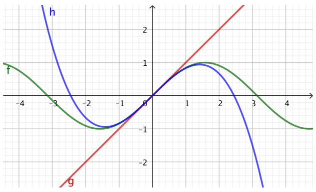

Figure 1.

2. On définit f par $f(x) = \dfrac{2x+1}{4x+3}$.
   a. Sur $[1;2]$, encadrer $2x+1$ et $4x+3$, en déduire que $\dfrac{3}{11} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{7}$.
   b. Résoudre $f(x) = \dfrac{3}{11}$.
      Réponse : $x = -\dfrac{1}{5}$.
   c. Encadrer plus finement f sur $[1;2]$.
      Réponse : f croissante donc $f(1) = \dfrac{3}{7} \leqslant f(x) \leqslant f(2) = \dfrac{5}{11}$.
      Curieux c'est ce qu'on obtenait en divisant abusivement les deux inégalités...
3. Déterminer $\text{Max}\{\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
   Réponse : si $f(x) = x^{1/x}$ alors $f'(x)$ est du même signe que $(1 - \ln x)$ donc Sup f est atteint en $x = \mathrm{e}$, reste à comparer $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{3}$ ce qui se fait en mettant puissance 6 et le max est :
$$\sqrt[3]{3} \approx 1,44.$$

2. Autour des inégalités classiques $\dfrac{1}{x} \leqslant k$ et $x^2 \leqslant k$

1. Carrés imbriqués :
   a. Résoudre $\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)^2 < 4$;
      Réponse : On développe... ça donne $1 - 4x < 0$.
   b. Résoudre $\left(\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 < 4$;

3. Divers

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 - x + 1} + x \geqslant 0$.
   Réponse : on vérifie d'abord que $\Delta < 0$ sous la racine, puis :
   - sur $\mathbb{R}_+$ l'inégalité est toujours vraie ;
   - sur $\mathbb{R}_-$ l'inégalité est équivalente à $\sqrt{x^2 - x + 1}^2 - x^2 \geqslant 0$ en multipliant par l'expression conjuguée (ou à $\sqrt{x^2 - x + 1}^2 \geqslant x^2$ en élevant au carré), ce qui donne $-x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$ ce qui est vrai dans $\mathbb{R}_-$.

   Ainsi, $S = \mathbb{R}$.