Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

Le but est de primitiver.

On s'intéresse aux fractions rationnelles du type $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$, avec $\partial°(P) < \partial°(Q)$.

Se rappeler que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et $\begin{cases} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a\,b + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a\,b + b^2). \end{cases}$

1. $\dfrac{1}{2X^2 + X - 1} = \dfrac{1}{2(X+1)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{\beta}{X+1} + \dfrac{\gamma}{X - \dfrac{1}{2}}$.

   On a fait Δ en bas, puis fois $(X+1)$ et $X = -1$, et de même pour l'autre : $\beta = -\gamma = -\dfrac{1}{3}$.

2. $\dfrac{X}{2X^2 + X - 1}$: idem, on trouve $\beta = \dfrac{1}{3}$ et $\gamma = \dfrac{1}{6}$.

3. $\dfrac{1}{9X^2 - 6X + 1} = \dfrac{1}{(3X-1)^2}$ rien à faire...

4. $f(X) = \dfrac{X^2}{9X^2 - 6X + 1}$ on écrème : $f(X) =$

5. $\dfrac{1}{X^2 + X + 1}$: rien à faire, $\Delta > 0$ donc c'est de l'arctan.

6. $f(X) = \dfrac{3}{X - X^3} = \dfrac{3}{X(1-X)(1+X)} = \dfrac{\alpha}{X} + \dfrac{\beta}{1-X} + \dfrac{\gamma}{1+X}$ on multiplie par les pôles :

   $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 3/2 \\ \gamma = -3/2 \end{cases}$. Le fait que $\beta = -\gamma$ est prévisible par parité : f est impaire.

7. $f(X) = \dfrac{X^2 + 1}{X^3 + 2X^2 - 5X - 6} = \dfrac{X^2 + 1}{(X+1)(X-2)(X+3)} = \dfrac{\alpha}{X+1} + \dfrac{\beta}{X-2} + \dfrac{\gamma}{X+3}$

   On a remarqué que $X = -1$ est racine évidente en bas puis factorisation et Δ.

   Méthode des pôles : $\begin{cases} \alpha = -1/3 \\ \beta = 1/3 \\ \gamma = 1 \end{cases}$.

8. $f(X) = \dfrac{X^3}{1 - X^4} = \dfrac{X^3}{(1+X^2)(1-X)(1+X)} = \dfrac{\alpha\,X + \beta}{1 + X^2} + \dfrac{\gamma}{1-X} + \dfrac{\gamma'}{1+X}$.

   Parité : f impaire donc $\beta = 0$ et $\gamma = -\gamma'$.

   Méthode des pôles : $\gamma = 1/4$.

   Puis on fait produit par X et limite $X \to +\infty$: $-1 = \alpha - \gamma + \gamma'$ d'où $\alpha = -1/2$.

9. $f(X) = \dfrac{X^2}{1 - X^4} = \dfrac{X^2}{(1+X^2)(1-X)(1+X)} = \dfrac{\alpha\,X + \beta}{1 + X^2} + \dfrac{\gamma}{1-X} + \dfrac{\gamma'}{1+X}$

   Parité : f paire donc $\alpha = 0$ et $\gamma = \gamma'$.

   Méthode des pôles : $\gamma = 1/4$.

   Puis $X = 0$: $0 = \beta + \gamma + \gamma'$ d'où $\beta = -1/2$.

10. $f(X)=\dfrac{X^2+2X^3}{1-X^4}=\dfrac{X^2+2X^3}{(1+X^2)(1-X)(1+X)}=\dfrac{\alpha X+\beta}{1+X^2}+\dfrac{\gamma}{1-X}+\dfrac{\gamma'}{1+X}$

    Pas de parité...

    Méthode des pôles : $\gamma=3/4$ et $\gamma'=-1/2$

    Puis $X=0$: $0=\beta+\gamma+\gamma'$ d'où $\beta=-1/4$.

    Puis fois X et $X\to+\infty$: $-2=\alpha-\gamma+\gamma'$ d'où $\alpha=-3/4$.

    [trouver exemples où il faut prendre $X=2$]

11. Une astucieuse à retenir : $1+X^4=\underbrace{1+2X^2+X^4}_{\text{identité remarquable}}-2X^2=\underbrace{(1+X^2)^2-\left(X\sqrt{2}\right)^2}_{\text{autre identité remarquable}}$.

    $f(X)=\dfrac{1}{1+X^4}=\dfrac{1}{\left(1+X^2-X\sqrt{2}\right)\left(1+X^2+X\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\alpha X+\beta}{1+X^2-X\sqrt{2}}+\dfrac{\alpha' X+\beta'}{1+X^2+X\sqrt{2}}$.

    Parité : $\beta=\beta'$ et $\alpha=-\alpha'$.

    Fois X et $X\to+\infty$: $\alpha+\alpha'=0$, on le savait déjà.

    $X=0$: $1=\beta+\beta'$ d'où $\beta=\beta'=1/2$.

    Dérivée en 0 : $f'(0)=0=\dfrac{\alpha\times1-\beta\times\left(-\sqrt{2}\right)}{1^2}+\dfrac{\alpha'\times1-\beta'\times\left(\sqrt{2}\right)}{1^2}$ ... rien.

    $X=1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2-\sqrt{2}}+\frac{\alpha'+\beta'}{2+\sqrt{2}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=(\alpha+\beta)\left(2+\sqrt{2}\right)+(\alpha'+\beta')\left(2-\sqrt{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ &1=(\alpha+\beta)\left(2+\sqrt{2}\right)+(-\alpha+\beta)\left(2-\sqrt{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ &1=2\alpha\sqrt{2}+4\beta\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\alpha
\end{aligned}$$

12. $f(X)=\dfrac{X}{1+X^4}=\dfrac{X}{\left(1+X^2-X\sqrt{2}\right)\left(1+X^2+X\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\alpha X+\beta}{1+X^2-X\sqrt{2}}+\dfrac{\alpha' X+\beta'}{1+X^2+X\sqrt{2}}$

    Parité : $\beta=-\beta'$ et $\alpha=\alpha'$.

    Fois X et $X\to+\infty$: $\alpha+\alpha'=0$ donc $\alpha=\alpha'=0$.

    $X=0$: $0=\beta+\beta'$ on le savait déjà.

    Dérivée en 0 : $f'(0)=\dfrac{1-0}{1}=\dfrac{\alpha\times1-\beta\times\left(-\sqrt{2}\right)}{1^2}+\dfrac{\alpha'\times1-\beta'\times\left(\sqrt{2}\right)}{1^2}$,

    d'où $2\alpha+2\beta\sqrt{2}=1$ d'où $\beta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

13. $f(X)=\dfrac{1+X}{1+X^4}=\dfrac{1+X}{\left(1+X^2-X\sqrt{2}\right)\left(1+X^2+X\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\alpha X+\beta}{1+X^2-X\sqrt{2}}+\dfrac{\alpha' X+\beta'}{1+X^2+X\sqrt{2}}$

    Parité : rien

    Fois X et $X\to+\infty$: $\alpha+\alpha'=0$.

    $X=0$: $1=\beta+\beta'$.

Dérivée en 0 : $f'(0)=1=\dfrac{\alpha\times 1-\beta\times\left(-\sqrt{2}\right)}{1^2}+\dfrac{\alpha'\times 1-\beta'\times\left(\sqrt{2}\right)}{1^2}$ on substitue :

$$\begin{aligned}
& 1=\beta\sqrt{2}-(1-\beta)\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ & 1+\sqrt{2}=2\beta\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ & \beta=\frac{2+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

$X=1$:

$$\begin{aligned}
& 1=\frac{\alpha+\beta}{2-\sqrt{2}}+\frac{\alpha'+\beta'}{2+\sqrt{2}}\\
\Leftrightarrow\ & \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=(\alpha+\beta)\left(2+\sqrt{2}\right)+(\alpha'+\beta')\left(2-\sqrt{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ & 2=(\alpha+\beta)\left(2+\sqrt{2}\right)+(-\alpha+1-\beta)\left(2-\sqrt{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ & 1=2\alpha\sqrt{2}+2\beta\sqrt{2}+2-\sqrt{2} \text{ on substitue } \beta :\\
\Leftrightarrow\ & 1=2\alpha\sqrt{2}+3\\
\Leftrightarrow\ & \alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ ouf...}
\end{aligned}$$

14. $f(X)=\dfrac{X+X^5}{X^2-X^{10}}=\dfrac{X+X^5}{X^2(1-X)(1+X)(1+X^2)\left(1+X^2-X\sqrt{2}\right)\left(1+X^2+X\sqrt{2}\right)}$,

$f(X)=\dfrac{\alpha X+\beta}{X^2}+\dfrac{\gamma}{1-X}+\dfrac{\gamma'}{1+X}+\dfrac{\varepsilon X+\varphi}{1+X^2}+\dfrac{\mu X+\lambda}{1+X^2-X\sqrt{2}}+\dfrac{\mu' X+\lambda'}{1+X^2+X\sqrt{2}}$.

Impaire : donc $\begin{cases}\beta=0\\ \gamma=-\gamma'\\ \varphi=0\\ \mu=\mu'\\ \lambda=-\lambda'.\end{cases}$

Pôle $1-X$: on trouve $\gamma=\dfrac{2}{2\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{1}{2}$.

Fois X et $X\to+\infty$: on trouve $0=\alpha-\gamma+\gamma'+\varepsilon+\mu+\mu'\Leftrightarrow 1=\alpha+\varepsilon+2\mu$.

$X=0$: pas possible c'est un pôle.

Pôle X^2 (on multiplie par X^2 puis $X=0$) : $0=\beta$ on le savait déjà.

Dérivée en 0 : pas possible c'est un pôle.

$X=2$: $\dfrac{34}{-1020}=\dfrac{2\alpha}{4}-\gamma+\dfrac{\gamma'}{3}+\dfrac{2\varepsilon+\varphi}{5}+\dfrac{2\mu+\lambda}{5-2\sqrt{2}}+\dfrac{2\mu'+\lambda'}{5+2\sqrt{2}}$, on remplace :

$\dfrac{17}{-510}=\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{4}{3}\gamma+\dfrac{2\varepsilon+\varphi}{5}+\dfrac{2\mu+\lambda}{5-2\sqrt{2}}+\dfrac{2\mu-\lambda}{5+2\sqrt{2}}$, ça devient très long...

Il faut passer par les complexes : on multiplie par le pôle $1+X^2$ et on fait $X=\mathrm{i}$:

$\dfrac{\mathrm{i}+\mathrm{i}^5}{-1(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\left(-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{i}+\mathrm{i}^5}{-1(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\left(-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)} &= \varepsilon\mathrm{i}+\varphi\\
\Leftrightarrow\frac{1}{-2} &= \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Essayons de dériver :

$$f'(X) = \frac{(1+5X^4)(X^2-X^{10})-(X+X^5)(2X-10X^9)}{(X^2-X^{10})^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{-1-2X^4+5X^6+9X^8+5X^{12}}{X^2(1-X^8)^2} &= -\frac{\alpha}{X^2}+\frac{\gamma}{(1-X)^2}+\frac{\gamma}{(1+X)^2}+\frac{\varepsilon-\varepsilon X^2}{(1+X^2)^2}\\ &+\frac{\mu+\lambda\sqrt{2}-\mu X^2-2\lambda X}{\left(1+X^2-X\sqrt{2}\right)^2}\\ &+\frac{\mu+\lambda\sqrt{2}-\mu X^2+2\lambda X}{\left(1+X^2+X\sqrt{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

On peut maintenant faire fois X^2 et $X=0$: $-1=-\alpha$.

On a à présent : $\alpha=1$ et donc en reprenant les équations précédentes : $\mu=\frac{1}{4}$.

Remarque on pouvait dès le départ remarquer que $\frac{X+X^5}{X^2-X^{10}}=\frac{1+X^4}{X-X^9}$...

.

1 Parité

On regarde tout de suite la parité.

Dans l'exemple ci-dessus, f est paire donc $A=A'$ et $C=0$.

Exercices : que dire grâce à la parité dans les exemples suivants ?

1. $\frac{X}{1-X^4}=\frac{A}{1-X}+\frac{A'}{1+X}+\frac{CX+D}{1+X^2}$
2. $\frac{1}{1-X^3}=\frac{A}{1-X}+\frac{BX+C}{1+X+X^2}$
3. $\frac{X^2}{X-X^3}=\frac{A}{X}+\frac{B}{1+X}+\frac{B'}{1-X}$

2 Gérer les pôles de degré 1

On utilise la forme factorisée et la forme décomposée :

$\frac{1}{(1-X)(1+X)(1+X^2)}=\frac{A}{1-X}+\frac{A'}{1+X}+\frac{CX+D}{1+X^2}$.

On multiplie par $(1-X)$ à gauche et à droite, on obtient :

$\frac{1}{(1+X)(1+X^2)}=A+\frac{A'(1-X)}{1+X}+\frac{(CX+D)(1-X)}{1+X^2}$ et on remplace X par 1 :

$\frac{1}{4}=A$.

Exercices :

1. Dans $\frac{1}{(1-X)(1+X)(1+X^2)}=\frac{A}{1-X}+\frac{A'}{1+X}+\frac{CX+D}{1+X^2}$, trouver A' directement.
2. Dans $\frac{X^2}{X-X^3}=\frac{A}{X}+\frac{B}{1+X}+\frac{B'}{1-X}$, bien écrire la forme factorisée, puis trouver A, B, B' directement.

3. Dans $\dfrac{X}{1-X^4}=\dfrac{A}{1-X}+\dfrac{A'}{1+X}+\dfrac{CX+D}{1+X^2}$, trouver A et A' directement

3 Limite en $+\infty$ après produit par X

On utilise la forme initiale et la forme décomposée.

Exemple, $\dfrac{X}{1-X^4}=\dfrac{A}{1-X}+\dfrac{A'}{1+X}+\dfrac{CX+D}{1+X^2}$, je multiplie par X :

$\dfrac{X^2}{1-X^4}=\dfrac{AX}{1-X}+\dfrac{A'X}{1+X}+\dfrac{CX^2+DX}{1+X^2}$, je prends $X\to+\infty$:

$0=-A+A'+C$.

Exercices, appliquer pour :

1. $\dfrac{X^2}{X-X^3}=\dfrac{A}{X}+\dfrac{B}{1+X}+\dfrac{B'}{1-X}$
2. $\dfrac{1}{1-X^3}=\dfrac{A}{1-X}+\dfrac{BX+C}{1+X+X^2}$
3. $\dfrac{1}{1-X^6}=\dfrac{1}{(1-X^2)(1-X+X^2)(1+X+X^2)}=\dfrac{a}{1-X}+\dfrac{b}{1+X}+\dfrac{cX+d}{1+X+X^2}+\dfrac{eX+f}{1-X+X^2}$

4 Prendre d'autres valeurs pour X

Dans $\dfrac{1}{1-X^3}=\dfrac{A}{1-X}+\dfrac{BX+C}{1+X+X^2}$ si je prend $X=-1$ j'obtiens : $\frac{1}{2}=\frac{A}{2}+C-B$.

Exercices : remplacer X par une valeur simple et écrire l'équation résultante :

1. $\dfrac{1}{1-X^6}=\dfrac{1}{(1-X^2)(1-X+X^2)(1+X+X^2)}=\dfrac{a}{1-X}+\dfrac{b}{1+X}+\dfrac{cX+d}{1+X+X^2}+\dfrac{eX+f}{1-X+X^2}$
2. $\dfrac{X^2}{X-X^3}=\dfrac{A}{X}+\dfrac{B}{1+X}+\dfrac{B'}{1-X}$

5 En cas vraiment de besoin : $f'(0)$

On peut parfois dériver si c'est simple. On utilise dans ce cas les formes initiale et décomposée.

Exemple : $\dfrac{1}{1-X^3}=\dfrac{A}{1-X}+\dfrac{BX+C}{1+X+X^2}$, je dérive :

$\dfrac{3X^2}{(1-X^3)^2}=\dfrac{A}{(1-X)^2}+\dfrac{(B)(1+X+X^2)-(BX+C)(1+2X)}{(1+X+X^2)^2}$.

Je prend $X=0$: $0=A+B-C$. C'est plus rapide qu'il n'y paraît et ça donne une équation de plus. C'est parfois moins fastidieux que par exemple de remplacer X par 2.

Exercices, prendre la dérivée en $X=0$ à gauche et à droite :

1. $\dfrac{1}{1-X^6}=\dfrac{a}{1-X}+\dfrac{b}{1+X}+\dfrac{cX+d}{1+X+X^2}+\dfrac{eX+f}{1-X+X^2}$
2. $\dfrac{X^2}{X-X^3}=\dfrac{A}{X}+\dfrac{B}{1+X}+\dfrac{B'}{1-X}$

6 Utilisation des complexes.

On reprend ce qu'on a dit sur les pôles, mais avec X remplacé par un complexe.

Exemple :

$$\left(\frac{X}{1-X^4}=\right)\frac{X}{(1-X)(1+X)(1+X^2)}=\frac{A}{1-X}+\frac{A'}{1+X}+\frac{CX+D}{1+X^2},$$

je multiplie par $1+X^2$ à gauche et à droite :

$\dfrac{X}{(1-X)(1+X)}=\dfrac{A(1+X^2)}{1-X}+\dfrac{A'(1+X^2)}{1+X}+CX+D$, et je prend $X=\mathrm{i}$:

$\dfrac{\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=0+0+C\,\mathrm{i}+D$ ce n'est pas un calcul très difficile.

À n'utiliser que s'il y a des facteurs dont les racines sont simples style $1+X^2$.

Je te déconseille d'appliquer pour des facteurs du style $1+X+X^2$ où la racine complexe est plus compliquée : gros risques d'erreurs de calcul.

Application :

1. $\dfrac{X+1}{X+X^3}=\dfrac{X+1}{X(1+X^2)}=\dfrac{A}{X}+\dfrac{BX+C}{1+X^2}$.

7 Une solution alternative : l'identification.

Cette solution conduit à un système et permet de trouver tous les coefficients ensemble.

Exemple : $\dfrac{X^2+1}{X+X^3}=\dfrac{A}{X}+\dfrac{BX+C}{1+X^2}$, je mets au même dénominateur à droite :

$\dfrac{X^2+1}{X+X^3}=\dfrac{A(1+X^2)+(BX+C)X}{X(1+X^2)}$, je développe et j'ordonne :

$\dfrac{X^2+1}{X+X^3}=\dfrac{A+CX+(A+B)X^2}{X(1+X^2)}$ j'identifie les hauts, degré par degré :

$$\begin{cases} A=1 \\ C=0 \\ A+B=1. \end{cases}$$

8 Exercices

Utiliser toutes les techniques vues ci-dessus de 1 à 8 pour trouver les coefficients des fractions rationnelles apparues dans ce document depuis le début. Quand c'est fini, recommencer avec l'identification (juste poser les système).

Voici la liste des fractions rationnelles apparues dans ce document depuis le début :

1. $\dfrac{1}{2X^2+X-1}$ 2. $\dfrac{1}{X-X^3}$ 3. $\dfrac{1}{X^3+12X^2+8X-3}$ 4. $\dfrac{1}{1-X^3}$

5. $\dfrac{1}{1-X^6}$ 6. $\dfrac{1}{1-X^4}$ 7. $\dfrac{1}{X^2-X^{10}}$ 8. $\dfrac{X}{1-X^4}$

9. $\dfrac{X^2}{X-X^3}$ 10. $\dfrac{X^2}{1-X^4}$ 11. $\dfrac{X+1}{X+X^3}$ 12. $\dfrac{X^2+1}{X+X^3}$ 13. $\dfrac{1}{1+X^4}$.

9 Division euclidienne d'un polynôme par un autre

Ce document n'a pas traité les cas où $\partial°$(numérateur) $\geqslant \partial°$(numérateur).

Lorsque $\boldsymbol{\partial°}$(numérateur) $\geqslant \boldsymbol{\partial°}$(numérateur), on fait la division euclidienne du haut par le bas.

Exemple 1 : pour $\dfrac{4X^3+2}{2X+1}$, on fait : $4X^3+2$ divisé par $2X+1$.

On trouve : $4X^3+2 = \left(\underbrace{2X^2 - X + \frac{1}{2}}_{Q(X)}\right)(2X+1) \underbrace{+\frac{3}{2}}_{R(X)}$.

Le reste $R(X)$ doit être de degré strictement inférieur à $2X+1$ (ici donc de degré 0).

On remplace : $\dfrac{4X^3+2}{2X+1} = \dfrac{\left(2X^2 - X + \frac{1}{2}\right)(2X+1)}{2X+1} + \dfrac{3/2}{2X+1} = 2X^2 - X + \frac{1}{2} + \dfrac{3/2}{2X+1}$.

Exemple 2 : pour $\dfrac{X^5}{1-X^4}$ on divise : $X^5 = (-X)(1-X^4) + X$ d'où $\dfrac{X^5}{1-X^4} = -X + \dfrac{X}{1-X^4}$, reste à faire les éléments simples de $\dfrac{X}{1-X^4}$, car le $-X$ tout seul on le laisse comme ça.

Exercices : $\dfrac{X^6+X^2}{1-X^6}$ et $\dfrac{X^8+X^2}{1-X^6}$