Fonctions à deux variables

Table des matières

On s'intéresse ici *a priori* aux fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

---

1. Recherche de fonctions discontinues

1. Où $\lim\limits_{(0,0)}$ peut valoir tantôt 0, tantôt $+\infty$

1) Trouver une fonction f discontinue en $(0,0)$ vérifiant :

$\lim\limits_{(0,0)} f=0$ pour certains chemins et $\lim\limits_{(0,0)} f=+\infty$ pour d'autres.

Posons $f(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{r} & \text{si } a<\theta<b\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

Voici le graphe de $f_0(r,\theta)=\dfrac{1}{r}$:

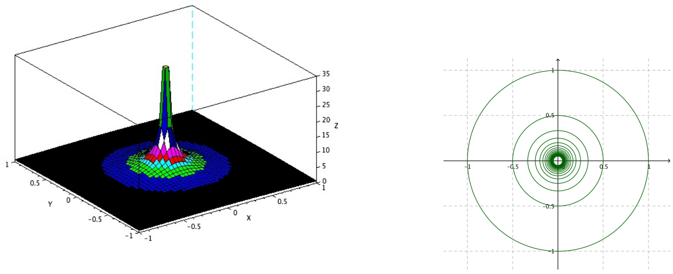


Figure 1. Graphe de $f_0(r,\theta)=\dfrac{1}{r}$

On tronque maintenant. La partie sombre correspond à $a<\theta<b$:

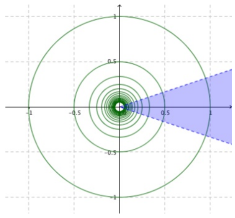


Figure 2. Graphe de $f(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{r} & \text{si } a<\theta<b\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

On a donc $\lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta)=0$ pour tout chemin dans la partie claire, et $\lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta)=+\infty$ pour tout chemin dans la partie sombre.

2) Trouver une fonction discontinue en $(0,0)$ vérifiant :

$\lim\limits_{(0,0)} f=0$ le long de toute demi-droite $\theta=C^{\text{ste}}$ et $\lim\limits_{(0,0)} f=+\infty$ pour d'autres chemins.

Solution 1 :

Reprenons la courbe précédente $f(r,\theta)=\begin{cases}0 & \text{pour } y=0\\ \dfrac{1}{r} & \text{sur la partie sombré en prenant ici une}\\ 0 & \text{ailleurs,}\end{cases}$ partie sombre délimitée par $\begin{cases} y=\pm x^2\\ x>0\end{cases}$:

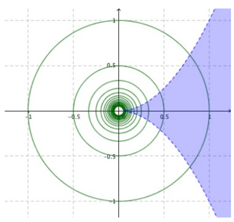


Figure 3.

Ici, le long de tout chemin linéaire $y=a\,x$ on a $f(r,\theta)\to 0$, mais le long de $y=\dfrac{x^2}{2}$ par exemple on a $f(r,\theta)\to+\infty$.

Solution 2 :

Prenons la courbe $f(r,\theta)=\dfrac{r}{\theta}$ pour $\theta\in[0;2\pi[$. Alors :

- sur tout chemin centripète ($\theta=C^{\text{ste}}$ et $r\to 0$) vers $(0,0)$, on a $f\to 0$;
- sur le chemin $r=\theta\to 0$ on a $f=C^{\text{ste}}=1$;
- sur le chemin $r=\sqrt{\theta}\to 0$ on a $f\to+\infty$.

2. Où $\lim\limits_{(0,0)}$ peut prendre touter valeur d'un intevalle donné

Trouver une fonction discontinue en $(0,0)$, avec plus précisément :
$\forall\mu\in I$, il existe un chemin $\mathcal{C}$ menant vers $(0,0)$ tel que $\lim\limits_{\mathcal{C}} f=\mu$ où I est :

1. $I=[a,b]$;
2. $I=[0;+\infty]$.

Réponse :

- Pour $I=[0;2\pi]$, prendre $f(r,\theta)=\theta\in[0;2\pi[$, toutes les limites $a\in I$ sont atteignable par un chemin centripète, sauf $a=2\pi$ pour laquelle il faut tourner un peu.
- Pour $I=[a,b]$ prendre $f(r,\theta)=a+\theta(b-a)$ où $\theta\in[0;2\pi[$.
- Pour $I=[0;+\infty]$ prendre $f(r,\theta)=\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{1}{2\pi}$ pour $\theta\in]0;2\pi]$.
  Pour une limite $a\in[0;+\infty[$, prendre $\theta=C^{\text{ste}}$ tel que $\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{1}{2\pi}=a$.
  Pour $a=+\infty$, il faut tourner ($r\to 0$ et $\theta\to 0$).

2. Prolongements en $(0,0)$

2.1. Exos courts

1. $f(x,y)=\dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$. En étudiant la limite en $(0,0)$ le long des droites $\theta=C^{\text{ste}}$, montrer que f admet toutes les limites possibles dans un certain intervalle $[a,b]$ où a et b sont à déterminer.

   Réponse : f est nulle sur les axes et constante égale à $\dfrac{1}{2}\sin(2\theta)$ sur les droites $\vartheta=\mathrm{C}^{\text{ste}}$, on a donc toutes les limites possibles sur $[0,1/2]$:

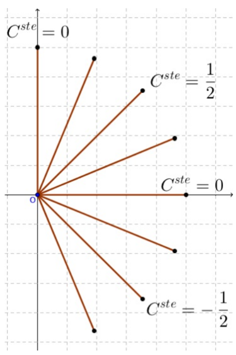


Figure 4. Limites possibles de f en $(0,0)$ par chemins centripètes.

2. $f(x,y)=\dfrac{1}{(x-y)^2}$: prouver que f possède une limite $+\infty$ en tout point (a,a).

Réponse : Prenons par exemple $a=0$, on a alors :

$$\begin{aligned} f(x,y) &\geqslant \frac{1}{(x-y)^2+(x+y)^2} \\ &= \frac{1}{2(\|x,y\|_2)^2}. \end{aligned}$$

En d'autres valeurs de a on peut écrire adapter ça ou bien dire pour $a\neq 0$, on a : $(x,y)\to(a,a)\Leftrightarrow(r,\theta)\to\left(a\sqrt{2},\pm\frac{\pi}{4}\right)$ et utiliser la forme polaire de f :

$$f(r,\theta)=\frac{1}{r^2\cos(2\theta)}$$

3. $f(x,y)=(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$: f est-elle continue en $(0,0)$; quelles sont les ou la limite(s) en ce point ?

   Réponse : limite nulle en $(0,0)$ car $|f(x,y)|\leqslant\|x,y\|_1\leqslant\|x,y\|_2$.

4. $f(x,y)=\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$. Déterminer $\lim\limits_{(0,0)} f$.

   Réponse :

   D'après les inégalités, $f(x,y)\geqslant\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{\|x,y\|_2}$ donc : $\lim\limits_{(0,0)} f=+\infty$.

5. $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(x\,y)}{y^2}$: limite en $(0,0)$?

6. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$: est-elle continue en $(0,0)$?

   On a 0 suivant toute droite, mais toutes les limites possibles dans $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ pour $y=a\,x^2$.

2.2. Exos longs

2.2.1. $f(x,y)=\ln|x-y|+\dfrac{1}{(y-\alpha)-\mu(x-\alpha)}$

Soit la fonction : $f(x,y)=\ln|x-y|+\dfrac{1}{(y-\alpha)-\mu(x-\alpha)}$ avec $\mu\in\mathbb{R}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

Étudier les points de discontinuité de f.

On suppose $\mu<1$. Les raisonnements sont symétriques pour $\mu>1$.

- Vers les points de la droite $\Delta_{\ln}$ d'équation $y=x$, la limite est $-\infty$ dictée par le ln.
- Vers les points de la droite Δ_{frac} d'équation $y-a=\mu(x-\alpha)$, la limite est $\pm\infty$ dictée par la fraction. Déjà tous les points de Δ_{frac} sont points de discontinuité de f.
- Et à l'intersection des deux, soit en (α,α) il y a conflit.

Étudions ce conflit :

- Déjà, $f(\alpha,y)=\ln|y-\alpha|+\dfrac{1}{y-\alpha}$ de limite $-\infty$.

Prenons alors un chemin du style $(y-\alpha)=k(x-\alpha)$, on a alors :

$$f(x,y)=\ln|x-\alpha|+\ln|1-k|+\frac{1}{(k-\mu)(x-\alpha)}$$

La limite est donnée par le schéma suivant :

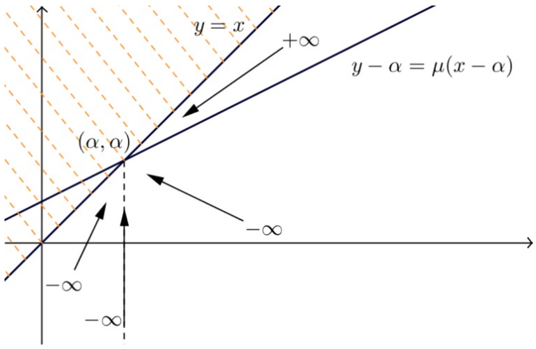


Figure 5.

Remarque : un chemin du style $y=x-(x-\alpha)^n$ ne changerait rien aux résultats de ce schéma.

2.2.2. $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

On pose :

$$f(x,y)=\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Étudier les limites possibles en $(0,0)$ suivant la direction (chemin linéaire vers 0) choisie.

Réponse : On a $f(x,0)=\dfrac{\ln x}{|x|}$ de limite $-\infty$ lorsque $x\to 0$.

D'autre part, $f(0,y)=\dfrac{y}{|y|}$, constant égal à ± 1 suivant le signe de y.

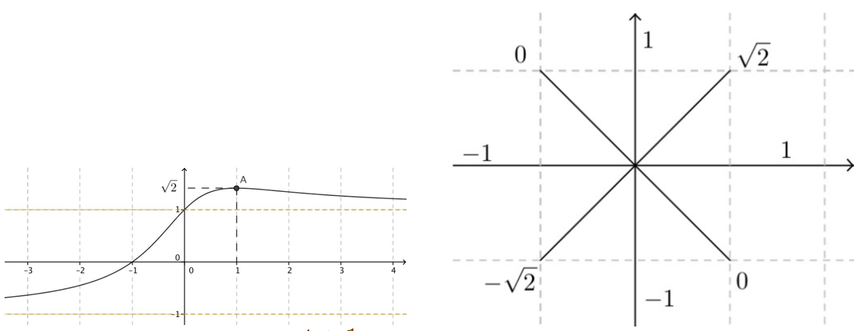
Déjà, on voit que f est discontinue en $(0,0)$.

Regardons le long d'une droite :

1. Pour $t\neq -1$, on a $f(x,tx)=\dfrac{\ln(x+e^{tx})}{|x|\sqrt{1+t^2}}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\ln(1+(t+1)x)}{|x|\sqrt{1+t^2}}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x}{|x|}\times\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}$.

2. Pour $t=-1$ cela donne $f(x,-x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{|x|}{2\sqrt{2}}$.

Étudions la quantité $u(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}$. On trouve $u'(t)$ du signe de $(1-t)$ d'où :



courbe de $u(t)=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}$ — limites en $(0,0)$ de f suivant la direction

Figure 6.

2.2.3. $f(x, y) = \dfrac{x^n y^p}{(x^2+y^2)^k}$

(généralisation d'un exo court ci-dessus).

Discuter suivant les valeurs de k, de la continuité de f en $(0,0)$.

Exercice 1. .

Solution. $f(x,y) = \dfrac{x^n y^p}{(x^2+y^2)^k}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Déjà f est nulle sur les axes.

De plus, on a $|x^n y^p| \leqslant (\|x,y\|_\infty)^{n+p} \leqslant (\|x,y\|_2)^{n+p}$ donc :

- si $k < \dfrac{n+p}{2}$, alors $\lim\limits_{(0,0)} f = 0$;
- si $k = \dfrac{n+p}{2}$, alors $f(x, t\,x) = u(t) = \dfrac{t^p}{(1+t^2)^{\frac{n+p}{2}}}$ ne dépend que de la direction choisie (c'est-à-dire de t). La valeur de f en un $(x, t\,x)$ donné est donc égale à la limite de f en $(0,0)$ le long de la droite $(y = t\,x)$. (Si l'on a l'obsession de la symétrie et le goût du calcul on peut aussi vérifier que $f(t\,y, y) = f\left(x, \frac{x}{t}\right)$.) Les valeurs de u forment alors un tableau de variations pair ou impair qui prend les valeurs suivantes :

$t=0$	$u(t)=0$
$t=\sqrt{\dfrac{p}{n}}$	$u(t)=\dfrac{\sqrt{n^p p^n}}{\sqrt{n+p}^{\,n+p}}$ maximum de u (waoh...)
$t\to+\infty$	$u(t)\sim\dfrac{1}{t^n}$ donc $\lim\limits_{+\infty} u = 0$

- si $k > \dfrac{n+p}{2}$, alors $f(x, t\,x) = \dfrac{t^p}{(1+t^2)^{\frac{n+p}{2}}} \times \dfrac{1}{x^{2k-(n+p)}}$ de limite $+\infty$ si $x \to 0$ (mais la fonction reste nulle sur les axes). La limite en $(0,0)$ est donc $+\infty$ suivant toute droite sauf les deux axes où elle vaut 0.

2.2.4. $f(x, y) = \dfrac{x^n y^p}{x+y}$

On pose, pour tous $n, p \geqslant 1$:

$$f(x,y) = \frac{x^n y^p}{x+y}.$$

On voit que, pour $t \neq -1$, $f(x, t\,x) = \dfrac{x^{n+p}\,t^p}{x(1+t)} = x^{n+p-1}\dfrac{t^p}{1+t}$ de limite nulle lorsque $x \to 0$.

Par contre la limite infinie lorsque $\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ y \to -x_0 \end{cases}$ laisse penser qu'on doit pouvoir trouver un chemin $\mathcal{C}$ tel que $\lim\limits_{(x,y)\overset{\mathcal{C}}{\to}(0,0)} f(x,y) = +\infty$.

◎ Pour trouver ce chemin, posons $y = -x + f(x)$ où $f(x) = o(x)$, par exemple $y = -x + x^k$ et alors on a : $f(x, y(x)) = \dfrac{x^n(-x+x^k)^p}{x^k}$ donc $|f(x,y(x))| \underset{0}{\sim} x^{n+p-k}$ et alors :

- En choisissant $k = n+p$ on a un chemin $\mathcal{C}_1$ le long duquel $\lim\limits_{(x,y)\overset{\mathcal{C}_1}{\to}(0,0)} |f(x,y)| = 1$.

  Si $\begin{cases} x \to 0 \\ x > 0 \end{cases}$ alors, au voisinage de 0, $f(x, y(x))$ est du signe de $(-1)^p$.

  Si $\begin{cases} x \to 0 \\ x < 0 \end{cases}$ alors, au voisinage de 0, $f(x, y(x))$ est du signe de $(-1)^{n-k}$.

  Donc dans tous les cas : $\lim\limits_{(x,y)\overset{\mathcal{C}_1}{\to}(0,0)} f(x,y) = (-1)^p$.

- En choisissant $k > n + p$ on a un chemin $\mathcal{C}_\infty$ le long duquel $\lim\limits_{(x,y)\overset{\mathcal{C}_\infty}{\to}(0,0)} |f(x,y)| = +\infty$.

  Pour le signe c'est la même chose, on trouve : $\lim\limits_{(x,y)\overset{\mathcal{C}_\infty}{\to}(0,0)} f(x,y) = (-1)^{n-k} \times \infty$.

◎ De manière symétrique, on aurait pu prendre un chemin $x = -y + y^k$ et alors on aurait eu les mêmes deux chemins.

◎ Pour comprendre cette histoire de signes, voici un schéma des signes de f :

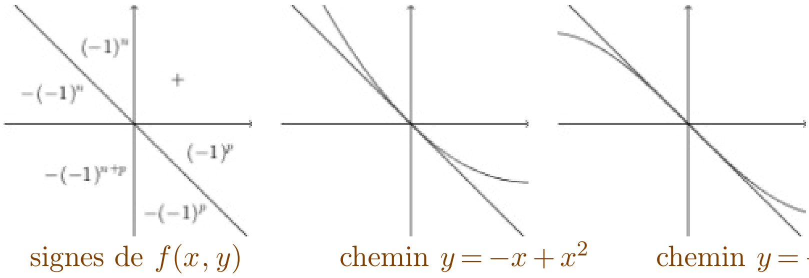


Figure 7.

Prouver, en utilisant soit des chemins linéaires vers 0, soit des chemins de la forme $y = -x + x^k$, que f n'est pas continue en $(0,0)$. Préciser les limites obtenues par ces chemins, sans se tromper dans les signes.

2.2.5. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$

On pose :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

f est-elle continue en $(0,0)$? Si non, quelles sont les limites possibles atteintes ?

Dessiner les isoclines (courbes $f(x,y) = C^{\text{ste}}$).

Indication : Regarder sur les courbes $\theta = C^{\text{ste}}$, et sur les courbes $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = C^{\text{ste}}$.

Réponse :

- en cartésiennes :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-y}{x\,y}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)^2};$$

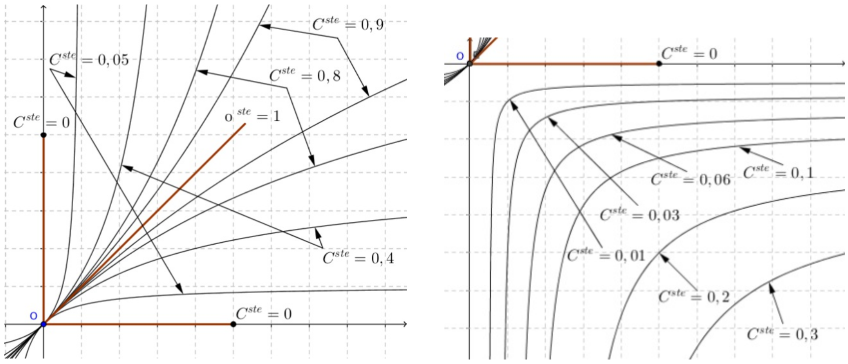
- en polaires :

$$f(r,\theta) = \frac{r^2 \sin^2(2\theta)}{r^2 \sin^2(2\theta) + 4(1 - \sin(2\theta))};$$

- donc f nulle sur les axes, constante égale à 1 sur la bissectrice d'équation $y = x$, de limite 0 sur les $\theta = C^{ste} \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

- le long des chemins $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = C^{\text{ste}}$, c'est-à-dire $(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{t}, \dfrac{1}{t+m}\right)$, on a $f(x,\ y) = C^{\text{ste}} = \frac{1}{1+m^2}$donc toutes les limites possibles dans $[0,1]$ sont atteintes.

Les courbes correspondant à ces isoclines sont les $y = \frac{1}{\frac{1}{x} + m} = \frac{x}{1 + m x}$.



isoclines de f

Figure 8.

3. Dérivation et Différenciation

3.1. Différentiabilité en $(0,0)$

1. $f(x,y) = |x| + |y|$ est-elle différentiable en $(0,0)$?
   non... pas de dérivées partielles en $(0,0)$.
2. $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$ est-elle différentiable en $(0,0)$? Idem avec $f(x,y) = y\,\mathrm{e}^{xy}$
   oui..
3. Étudier le prolongement de $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ en $(0,0)$.
   Réponse :
   - prolongeable par continuité avec $f(0,0) = 0$;
   - pas différentiable car $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continu en $(0,0)$.
4. Étudier le prolongement en $(0,0)$ en fonction de p de :
   $$f(x,y) = (x+y)^p \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$
   Est-il différentiable ?
   continue pour $p \geqslant 1$ et les dérivées partielles sont continues pour $p \geqslant 2$.

3.2. Étude d'extrema

1. Extrema globaux, locaux de $f(x,y) = x^4 y^3 + \ln(1+y^4)$ sur $[-1,1]^2$.
   les $(x,0)$ sont tous extrema locaux et $f(x,0) = 0$, extrema globaux en $(\pm 1; \pm 1)$ de valeur $1 + \ln(2)$.
2. Extrema de $f(x,y) = x^2 + y^3 - 2x\,y - y$.
   Points critiques : $(0,0)$ et $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$, un « dl » ordre 1 montre qu'ils ne sont même pas des extrema locaux.

3.3. Divers

1. $f(x,y) = \dfrac{\sin|x\,y|}{|x| + |y|}$, prolongement en $(0,0)$, dérivées partielles...
   Réponse : prolongeable par $f(0,0) = 0$; dérivées partielles non continues.
2. $f(x,y) = 1 - r^2$ si $r = \sqrt{x^2+y^2} > 1$ et $f(x,y) = 0$ si $r \leqslant 1$.
   Réponse : les dérivées partielles ne sont pas continues sur le cercle trigo.