1. Un exercice autour des pièces de monnaie

On demande le nombre de façons de payer 100€ avec une réserve illimitée de pièces de 10,20,50 centimes.

Le problème est traité par des sommations, puis par un calcul de DL et d'éléments simples.

On pourrait modifier l'énoncé pour que la question soit exactement la même dans les deux parties et mieux comparer les réponses des deux parties.

1.1. Par des sommations

1. Montrer que ça revient à résoudre $a+2y+5z=1000$.
2. Montrer que $x+2y=k$ possède $\left\lfloor \dfrac{k}{2} \right\rfloor + 1$ solutions dans $\mathbb{N}^2$.
3. Montrer que la réponse au problème est donc :
$$\sum_{z=0}^{200} \left(\left\lfloor \frac{1000-5z}{2} \right\rfloor + 1 \right).$$
4. En séparant les z pairs et les z impaires, montrer que l'on se ramène à calculer :
$$\sum_{k=1}^{100} (-10\,k+2) + 201 \times 501,$$
et que la réponse finale est donc 50401 façons.

1.2. Par un DL

On considère :
$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2\,(1+x)}.$$

1. Écrire le DL en 0 de f à l'ordre n de deux manières :
   (a) par le DL d'un produit ;
   (b) par les éléments simples.
2. En déduire le nombre de façons de payer k€ avec une réserve illimitée de pièces de 1€ et de 2€.

Réponse :

(a) on a $f(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p \sum_{q=0}^{n} x^{2q} + o(x^n)$ donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k + o(x^n)$ avec :
$$a_k = \sum_{p+2q=k} 1.$$
(b) on a $f(x) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{1+x}$, donc :
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n)$.
Conclusion :
$$a_k = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}.$$