1. Un exercice magnifique algèbre/équa diff

On considère dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'application :

$$\varphi\colon P(X) \to (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X).$$

1) Écrire φ sous forme matricielle.

2) Trouver valeurs et vecteurs propres de φ.

3) Retrouver ces résultats analytiquement en résolvant :

$$(2x+1)y - (x^2-1)y' = \lambda\, y$$

dans les trois cas $\lambda = -1$; $\lambda = 1$; $\lambda = 3$.

$*$ Réponses :

1) Si $P(X) = a\,X^2 + b\,X + c$, alors $\varphi(P)(X) = (a+b)X^2 + (2a+b+2c)X + (b+c)$ donc :

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\Phi_\varphi(X) = (X-1)(X-3)(X+1)$ donc $\mathrm{Sp}_\varphi = \{-1; 1; 3\}$:

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) On trouve $f(x) = k(x^2-1)\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1-\lambda}{2}}$ d'où :

- $\lambda = 1$: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2x}{x^2-1}$ d'où $f(x) = k(x^2-1)$: ça correspond à E_1.
- $\lambda = 1$: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2x+2}{x^2-1} = \dfrac{2}{x-1}$ d'où $f(x) = k(x-1)^2$: c'est E_{-1}.
- $\lambda = 3$: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2x-2}{x^2-1} = \dfrac{2}{x+1}$ d'où $f(x) = k(x+1)^2$: c'est E_3 !

L'analyse généralise les solutions de l'algèbre : l'équa diff a des solutions pour toute valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, mais seules les valeurs $\lambda \in \{-1;\, 1;\, 3\}$ produisent un polynôme comme solution.