Géométrie dans l'espace

Table des matières

1. Calculs de distances

1. Distance entre $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $\mathcal{P}\colon a\,x+b\,y+c\,z+d=0$. On commencera par déterminer l'équation paramétrique de la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M_0.

2. Distance entre $A(4;5;0)$ et $\mathcal{D}\colon \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2-3\lambda \\ y &=& -1+\lambda \\ z &=& 2\lambda \end{array}\right., \lambda\in\mathbb{R}$.

   Réponse : *heureusement c'est un cas particulier !*

   - Soit $B(2;-1;0)$ le point de $\mathcal{D}$ correspondant à $\lambda=0$.
   - Soit $\vec{u}(-3;1;2)$ directeur de $\mathcal{D}$.
   - On remarque que $\overrightarrow{AB}(-2;-6;0)$ et que, par chance, $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$ d'où $d(A,\mathcal{D})=d(A,B)$ et l'on trouve :

   $$d=\boxed{2\sqrt{10}}.$$

3. Distance entre $A(1;2;3)$ et $\Delta\colon \left\{\begin{array}{l} x-y=2 \\ 2x+z=1-y \end{array}\right.$.

   Réponse : on trouve deux points de Δ : $\left\{\begin{array}{l} U(2;0;-3) \\ V(0;-2;3) \end{array}\right.$ d'où un vecteur directeur de Δ : $\vec{u}(1;1;-3)$ d'où un plan générique perpendiculaire à Δ : $P_m\colon x+y-z=m$ et il passe par A ssi $m=-6$ puis l'intersection $P_{-6}\cap\Delta$ est $H\left(\frac{1}{5};\frac{-11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

   ou : on écrit $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ avec $M\begin{pmatrix} 2+\lambda \\ \lambda \\ -3-3\lambda \end{pmatrix}$. Calculs à vérifier.

4. Distance entre $P_1\colon -x-y+z=1$ et $P_2\colon 3x+3y-3z=1$.

5. Pour la distance entre deux droites on pourrait s'inspirer de l'exercice 3 de la section 2.

6. On donne :

$P_2\colon -x-y+z=1$	$P_3\colon 3x+3y-3z=1$

   Distance entre P_2 et P_3.

   Réponse : $P_2 \parallel P_3$ et $d(P_2,P_3)=d((0;0;1),(\alpha,\alpha,1-\alpha))$ avec $\alpha=4/9$ donc $d=\boxed{4\sqrt{3}/9}$.

2. Droites dans l'espace

1. On pose $\mathcal{D}_1\colon \left\{\begin{array}{lcl} x+2 &=& -2z \\ y &=& 3x+z \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}_2\colon \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z &=& 1 \\ 2x+y-z &=& a \end{array}\right.$ où a est un réel.

   Déterminer a pour que les deux droites soient coplanaires, et trouver alors l'équation du plan les contenant.

   Réponse : Le plan contenant $\mathcal{D}_1$ et parallèle à $\mathcal{D}_2$ a pour équation $\boxed{-x+2y+8z=-10}$.

   On trouve ensuite $\boxed{a=\dfrac{5}{3}}$

2. Trouver une équation de Δ vérifiant les trois conditions suivantes :

   - $\Delta \parallel D$ avec $D\colon 2x=3y=6z$;

- Δ sécante avec D_1 avec $D_1\colon x=z-4=0$;
- Δ sécante avec D_2 avec $D_2\colon y=z+4=0$;

Réponse :

- on trouve un vecteur directeur $\vec{u}(3;2;1)$ de D donc de Δ ;
- on cherche alors un point (a,b,c) de Δ ;
- on résoud $\Delta\cap D_1\neq\emptyset$ et $\Delta\cap D_2\neq\emptyset$, cela nous donne un système de deux équations et d'inconnues a,b,c ;
- on trouve $\Delta\colon\left\{\begin{array}{lcl} x&=&3\lambda\\ y&=&16+2\lambda\\ z&=&4+\lambda\end{array}\right.$ ou $\Delta\colon\left\{\begin{array}{l} x-3z+12=0\\ y-2z-8=0.\end{array}\right.$

3. On donne :

$D_1\colon\left\{\begin{array}{l} x+y-3z+4=0\\ 2x-z+1=0\end{array}\right.$	$D_2\colon\left\{\begin{array}{l} x=z-1\\ y=z-1.\end{array}\right.$

Vérifier que D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, puis trouver leur perpendiculaire commune Δ.

Réponse :

- on cherche des vecteurs directeurs, on trouve par exemple $\left\{\begin{array}{l} \vec{u_1}(1;5;2)\\ \vec{u_2}(1;1;1)\end{array}\right.$;
- on en déduit un vecteur directeur de Δ : $\vec{u}=\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}$ d'où $\boxed{\vec{u}(3;1;-4)}$;
- on écrit $\Delta\colon\left\{\begin{array}{lcl} x&=&a+3t\\ y&=&b+t\\ z&=&c-4t\end{array}\right.$ et l'on résoud $\left\{\begin{array}{l} \Delta\cap D_1\neq\emptyset\\ \Delta\cap D_2\neq\emptyset\end{array}\right.$, on trouve $\left\{\begin{array}{l} 22a-10b+14c=24\\ 5a-7b+2c=2\end{array}\right.$ d'où en prenant par exemple $a=0$: $\boxed{\left\{\begin{array}{l} a=0\\ b=10/39\\ c=74/39\end{array}\right.}$.

4. On donne :

$A(1;3;2)$	$D_1\colon\left\{\begin{array}{l} y=2x\\ z=1\end{array}\right.$	$D_2\colon\left\{\begin{array}{l} y=-2x\\ z=-1\end{array}\right.$

Montrer qu'il existe une unique droite Δ passant par A et croisant D_1 et D_2 et en donner une représentation paramétrique.

Réponse : je prend $\Delta\colon\left\{\begin{array}{lcl} x&=&1+\lambda\alpha\\ y&=&3+\lambda\beta\\ z&=&2+\lambda\gamma\end{array}\right.$ et je résoud $\left\{\begin{array}{l} \Delta\cap D_1\neq\emptyset\\ \Delta\cap D_2\neq\emptyset\end{array}\right.$, je trouve $\left\{\begin{array}{l} 2\alpha-\beta+\gamma=0\\ 6\alpha+3\beta-5\gamma=0\end{array}\right.$ d'où :

$$\Delta\colon\left\{\begin{array}{lcl} x&=&1+\lambda\\ y&=&3+8\lambda\\ z&=&2+6\lambda.\end{array}\right.$$

3. Droites et plans

1. Intersection de $\mathcal{D}\colon\left\{\begin{array}{lcl} x&=&2+\lambda\\ y&=&3-\lambda\\ z&=&7\end{array}\right., \lambda\in\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}\colon x+3y-5z+2=0$.
2. Équation du plan P parallèle à la droite (Oy) et passant par $A(0,-1,2)$ et $B(-1,2,3)$.

   Réponse : on a un vecteur normal du plan : $\vec{j}\wedge\overrightarrow{AB}=(1,0,1)$ puis on trouve P: $\boxed{x+z=2}$.
3. On donne $\Delta\colon\left\{\begin{array}{l} x=1-t\\ y=2+2t\\ z=-3t\end{array}\right.$ et $A(-1;-1;-1)$.

   a. Trouver l'équation du plan $P_1\perp\Delta$ passant par A.

   b. Trouver l'équation du plan P_2 contenant Δ et passant par A.
4. On donne :

$D_1\colon \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$	$D_2\colon \begin{cases} x+y=z \\ x-y=2z \end{cases}$	$P_1\colon 2x-3y+5z=1$	$P_3\colon \begin{cases} x=-1+3\lambda+5\mu \\ y=-2-4\mu \\ z=3-6\lambda \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

Déterminer $P_1 \cap D_1$, $P_1 \cap D_2$, $P_3 \cap D_1$, et $P_3 \cap D_2$.

5. On donne :

$D\colon \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$	$D'\colon \begin{cases} x=\lambda \\ y=7+\lambda \\ z=\lambda-4 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$	$A(-2,3,1)$	$\vec{n}(9;3;0)$	$\vec{u}(1;2;4)$

   a. Trouver l'équation cartésienne du plan passant par D et A, après avoir vérifié que $A \notin D$.

   b. Trouver l'équation du plan contenant D et de vecteur normal $\vec{n}$, après avoir vérifié que $D \perp \vec{n}$.

   c. Trouver l'équation du plan (D, D') après avoir vérifié que D et D' sont coplanaires.

   d. Trouver l'équation du plan contenant D et contenant une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

6. On donne :

$D_1\colon \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$	$D_2\colon \begin{cases} x+y=z \\ x-y=2z \end{cases}$
$P_1\colon 2x-3y+5z=1$	$P_3\colon \begin{cases} x=-1+3\lambda+5\mu \\ y=-2-4\mu \\ z=3-6\lambda \end{cases}, (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

Déterminer $P_1 \cap D_1$, $P_1 \cap D_2$, $P_3 \cap D_1$, et $P_3 \cap D_2$.

Réponses :

- $P_1 \cap D_1 = \{(2;1;0)\}$: c'est, par hasard, le point $\lambda = 0$ de D_1.
- $P_3 \cap D_1 = \{(5;-8;6)\}$: il faut changer le nom du paramètre de D_1 et c'est un pivot de Gauss 3×3.
- Pour $P_1 \cap D_2$ on peut le faire de tête en faisant $L_1 \pm L_2$ dans D_2, on aboutit à $\left(\frac{3}{19}; -\frac{2}{19}; \frac{2}{19}\right)$.
- Pour $P_3 \cap D_2$: à finir.

4. Plans

1. On donne $A(1;2;-1), B(3;2;0), C(2;1;-1), D(1;0;4)$. Déterminer l'intersection (sous forme paramétrique si c'est une droite) des plans (OAB) et (OCD).

2. On donne :

$P_1\colon 2x+3y+5z=0$	$P_2\colon -x-y+z=1$

Intersection entre P_1 et P_2

Réponse : $P_1 \cap P_2 = D\colon \begin{cases} x=8\lambda-1 \\ y=2-7\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

3. On donne :

$P_1\colon 2x-3y+5z=1$	$P_2\colon 3x-y-z=4$	$P_3\colon \begin{cases} x=-1+3\lambda+5\mu \\ y=-2-4\mu \\ z=3-6\lambda \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$	$P_4\colon \begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=2-\lambda-\mu \\ z=2\lambda+3\lambda \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

Déterminer $P_1 \cap P_2$, $P_2 \cap P_3$ et $P_3 \cap P_4$.

4. On donne :

$D_1\colon \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$	$D_2\colon \begin{cases} x+y = z \\ x-y = 2z \end{cases}$	$P_1\colon 2x-3y+5z=1$	$P_3\colon \begin{cases} x = -1+3\lambda+5\mu \\ y = -2-4\mu \\ z = 3-6\lambda \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

Déterminer $P_1 \cap D_1$, $P_1 \cap D_2$, $P_3 \cap D_1$, et $P_3 \cap D_2$.

5. $P\colon -3x+4y+6z=12$.
   a. On donne $A(1,2,3)$ vérifier que $A \notin P$ et trouver les coordonnées du symétrique de A par rapport à P.
   b. $Q\colon -x+5y+z=0$. Trouver une équation paramétrique de l'intersection $P \cap Q$.
6. Intersection de $\mathcal{D}\colon \begin{cases} x &= 2+\lambda \\ y &= 3-\lambda \\ z &= 7 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}\colon x+3y-5z+2=0$.

   Réponse : on trouve $\lambda = 12$ et $\boxed{\mathcal{I} = \{(-9;14;7)\}}$.
7. On donne $A(1;2;-1), B(3;2;0), C(2;1;-1), D(1;0;4)$. Déterminer l'intersection (sous forme paramétrique si c'est une droite) des plans (OAB) et (OCD).

   Réponse : $(OAB)\colon 2x-3y-4z=0$ et $(OCD)\colon 4x-9y-z=0$ donc $D(33\lambda, 14\lambda, 6\lambda)$.