Équa Diff

Table des matières

1. Ordre 1, linéaires

1.1. Équations sur $\mathbb{R}$

1.1.1. $-y' + 4y = 3x \sin(2x)$

calculs fastidieux pour primitiver λ'.

Homogène $y = \lambda\, \mathrm{e}^{4x}$

Particulière $\lambda' = -\mathrm{e}^{-4x}\, 3x \sin(2x)$.

Méthode 1 : On cherche λ sous la forme :

$$\lambda = \mathrm{e}^{-4x}(x\,(a\cos(2x) + b\sin(2x)) + a'\cos(2x) + b'\sin(2x)).$$

On trouve :

$$\begin{aligned}\lambda' &= \mathrm{e}^{-4x}(x\,(\underline{-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x))} \underline{- 4a'\cos(2x)} - 4b'\sin(2x)) \\ &\quad + \mathrm{e}^{-4x}((\underline{a\cos(2x)} + b\sin(2x)) + x\,(\underline{-2a\sin(2x)} + \underline{2b\cos(2x)})) \\ &\quad + \mathrm{e}^{-4x}\,(-2a'\sin(2x) + \underline{2b'\cos(2x)}),\end{aligned}$$

d'où en identifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -4a + 2b &=& 0 \\ -4b - 2a &=& -3 \\ -4a' + a + 2b' &=& 0 \\ -4b' + b - 2a' &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a &=& 3/10 \\ b &=& 3/5 \\ a' &=& \\ b' &=& \end{array}\right. .$$

Méthode 2 : $\lambda' = \Im(-\mathrm{e}^{-4x}\, 3x\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})$, on résoud donc $\Lambda' = 3x\, \mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-4)x}$.

1.1.2. Divers

1. $y' + 4y = x^2 \cos x$

   Très long ; on peut passer par les complexes ou annoncer :

   $$y = (a\,x^2 + b\,x + c)\sin x + (a'\,x^2 + b'\,x + c')\cos x.$$

   Solution particulière :

   $$y = \left(\frac{1}{17}x^2 + \frac{16}{17^2}x + \frac{94}{17^3}\right)\sin x + \left(\frac{4}{17}x^2 - \frac{30}{17^2}x + \frac{104}{17^3}\right)\cos x$$

2. $-y' - 4y = x^2 \sin(3x)$

   calculs fastidieux pour primitiver λ'.

   Réponse :

   - homogène $y = \lambda\, \mathrm{e}^{-4x}$;
   - particulière $\lambda' = \mathrm{e}^{-4x}\, x^2 \sin(3x)$, on cherche une primitive sous la forme :

     $\lambda = \mathrm{e}^{-4x}\,[x^2(a\sin(3x) + b\cos(3x)) + x(a'\sin(3x) + b'\cos(3x)) + (a''\sin(3x) + b''\cos(3x))]$

     on trouve un système qui donne d'abord (a, b), puis (a', b') puis (a'', b'').

3. $x\,y' - 5x^5\, y = 5x^2\, \mathrm{e}^{x^5 + x}$

   Réponse :

   - le pole 0 est illusoire, on peut simplifier par x ;
   - $y = (5(x-1)\,\mathrm{e}^x + k)\,\mathrm{e}^{x^5}$.

4. $y' = x^2 y + x^5$

   Réponse : $y = (x^3 + 3) + \lambda\, \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}$.

5. $y' + y\,\mathrm{th}\,x = x\,\mathrm{th}\,x$
   Réponse :
   a. homogène : $y = \dfrac{\lambda}{\mathrm{ch}\,x}$;
   b. particulière : $\lambda' = x\,\mathrm{sh}\,x$
   c. $y = x - \mathrm{th}\,x + \dfrac{\lambda}{\mathrm{ch}\,x}$.

1.2. Avec un point de raccordement à étudier en 0

1.2.1. $x\,y' + \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{x+1}$

	dans $]-\infty;0[$	dans $]0;+\infty[$
homogène	$y = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	
variation de la constante	$\lambda' = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{\lvert x\rvert}} \times \dfrac{1}{1+x}$	
particulière	$\begin{aligned}\lambda(x) &= \int^x 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{-t}} \times \dfrac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int^{\sqrt{-x}} 2\mathrm{d}(\sqrt{-t}) \dfrac{1}{1-(\sqrt{-t})^2} \\ &= \ln\left\lvert\dfrac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}\right\rvert\end{aligned}$	$\begin{aligned}\lambda(x) &= \int^x 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \times \dfrac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int^{\sqrt{x}} 2 \times \mathrm{d}(\sqrt{t}) \times \dfrac{1}{1+(\sqrt{t})^2} \\ &= 2\arctan(\sqrt{x}).\end{aligned}$
conclusion	$\boxed{y = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lvert x\rvert}} + \dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}} \cdot \ln\left\lvert\dfrac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}\right\rvert}$	$\boxed{y = \dfrac{\lambda + 2\arctan\sqrt{\lvert x\rvert}}{\sqrt{\lvert x\rvert}}}$
	c'est prolongeable en 0 <u>ssi</u> $\lambda = 0$: on trouve 2 à droite et 2 à gauche.	

1.2.2. Divers

1. $x^2 y' + 2x\,y = 1$
2. $\alpha\,x\,y' = y$, avec $\alpha \neq 0$.
   Réponse dans $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$:
   $y = \mu\,\lvert x\rvert^{\frac{1}{\alpha}}$;
   $\alpha > 0$, raccord continu en 0 pour toutes valeurs de μ et de μ' ;
   $\alpha \in]0;1[$, raccordement C^1 en 0 pour toutes valeurs de μ et de μ'.
3. $x^2 y' + 2x\,y = 1$
4. $x^2 y' + 2x\,y = 1$
5. $2\,x\,y' + y = x^4$
   Réponse dans $]-\infty;0[$ ou dans $]0;+\infty[$:
   homogène : $y = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$; particulière : $\lambda' = \dfrac{x^3}{2}\sqrt{\lvert x\rvert} = \dfrac{1}{2}\lvert x\rvert^{3,5}$; générale : $\boxed{y = \dfrac{x^4}{9} + \dfrac{k}{\sqrt{\lvert x\rvert}}}$.
   Raccord possible en 0 <u>ssi</u> $k = k' = 0$ et alors on a $\boxed{f(x) = \dfrac{x^4}{9}}$.
6. $x^2 y' + 2x\,y = 1$
   Réponse dans $]-\infty;0[$ ou dans $]0;+\infty[$:
   homogène : $y = \dfrac{\lambda}{x^2}$; particulière : $\lambda' = 1$; générale : $\boxed{y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{k}{x^2}}$.
   Aucun raccord possible en 0.
7. $3x^3 y' + y = x$

8. $x^3 y' - x^2 y = 1$

   Réponse dans $]-\infty;0[$ ou dans $]0;+\infty[$:

   homogène : $y = \lambda\, x$; particulière $\lambda = \dfrac{-1}{3x^3} + k$; générale : $y = \dfrac{-1}{3\,x^2} + k\,x$.

   Aucun raccord possible en 0.

9. $x^2\, y' - \dfrac{y}{x} = x$

1.3. Avec des point(s) de raccordements divers

1.3.1. $t(t^2+1)y' + 2y = t^2$ avec $y(1/e) = 0$

1. D'abord décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$$

   (on utilise la parité, le pole $t \to 0$, et la mise au même dénominateur).

2. Ensuite l'homogène donne :

$$y' = \left(-\frac{2}{t} + \frac{2t}{t^2+1}\right) y,$$

   soit

$$y = \lambda \frac{t^2+1}{t^2} = \lambda\left(1 + \frac{1}{t^2}\right).$$

3. On varie la constante :

$$\frac{(t^2+1)^2}{t}\lambda' = t^2 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda' = \frac{t^3}{(t^2+1)^2}.$$

4. On primitive avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= \int_a^x \frac{t^3}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \quad (*)\\
&= \int_a^x \frac{t^2}{2} \times \frac{2\,t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \left[\frac{t^2}{2} \times \frac{(-1)}{t^2+1}\right]_a^x - \int_a^x t \times \frac{(-1)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{-x^2}{2(x^2+1)} + C^{\mathrm{ste}} + \frac{1}{2}\int_a^x \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{-x^2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C^{\mathrm{ste}}.
\end{aligned}$$

   Remarque : poser $u = t^2$ dans $(*)$ marchait aussi.

5. Conclusion :

$$\begin{aligned}
y(x) &= \lambda \frac{x^2+1}{x^2}\\
y(x) &= \left(\frac{-x^2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C^{\mathrm{ste}}\right)\frac{x^2+1}{x^2}\\
y(x) &= \boxed{-\frac{1}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}.
\end{aligned}$$

   Il faut distinguer $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

6. Condition initiale :

$$\begin{aligned}
y(1/e) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e^2} + 1\right)\right)(1+e^2) = 0\\
&\Leftrightarrow \left(k + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e^2}{e^2}\right)\right)(1+e^2) = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \boxed{k = \frac{1}{2(1+e^2)} - \frac{1}{2}\ln(1+e^2) + 1}.
\end{aligned}$$

1.3.2. $x(x+1)y'+y=1+x$

Réponse dans $]0;+\infty[$:

- homogène : $y=\lambda\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;
- variation de la constante $\lambda'=\dfrac{1}{1+x}$ d'où $\lambda=\ln|1+x|+k$;
- générale : $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\ln|1+x|+k\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;
- on remarque que $y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln|1+x|}{x^2}-\dfrac{k}{x^2}$, ça servira pour les raccordements ;
- raccordements :
  - en 0, on a $y\sim\dfrac{k}{x}$, donc raccordable <u>ssi</u> $k_{\text{gauche}}=k_{\text{droite}}=0$ auquel cas la limite est 1 ;
  - en -1, on a $\lim\limits_{-1}f=0$ quelle que soit la valeur de k.
- raccordement de la dérivée :
  - en 0 pour $k=0$: il faut un DL : $y'\sim 1$ donc le raccordement est C_1 !
  -

1.3.3. Divers

1. $(1-x^2)y'=(2-x)\,y$

   Réponse dans $]-\infty;-1[$ ou dans $]-1;1[$ ou dans $]1;+\infty[$:

   on trouve $y=\lambda\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}}{1-x}$.

   Raccordement en 1 possible seulement pour $\lambda=0$ à gauche (et λ quelconque à droite).
   Le point $x=-1$ est un faux pole.
2. $(2+x)y'=2-y$
3. $(a\,x+b)y'=1-y$
4. $x(x+1)y'+y=1+x^2$
5. $x(x-2)y'=2y+2x(x-2)^2$

   Réponse dans $]-\infty;-1[$ ou dans $]-1;1[$ ou dans $]1;+\infty[$:

   homogène : $y=\dfrac{\lambda}{x}(x-2)$; particulière $y=(x-2)\left(x+\dfrac{k}{x}\right)$; générale : $y=$
   raccordement C^∞ en 0 pour $k=k'=0$
   pas de problème en 2.
6. $(x\ln x)\,y'+y=x$

   Réponse :

   - raccourci : on peut écrire $(y\ln x)'=1$ d'où $y=\dfrac{x+\lambda}{\ln x}$ directement ;
   - distinguer $]0;1[$ et $]1;+\infty[$;
   - raccordement possible en 1 pour $\lambda=-1$; le raccordement est C_1 (on peut le voir par un DL à l'ordre 2). $f(1)=-1$ et $f'(1)=1/2$.
   - dérivée nulle en 0 pour $\lambda=0$ et infinie sinon.
7. $(2+x)y'=2-y$

   Réponse dans $]-\infty;-2[$ ou $]-2;+\infty[$:

   On écrit $(2+x)y'+y=2$ et on reconnaît $((2+x)\,y)'=2$ d'où $\boxed{y=\dfrac{2x+k}{2+x}}$.

   Raccordement C^∞ en -2 possible pour $k=4$ $(y=C^{\text{ste}}=2)$
8. $(a\,x+b)y'=A-y$

Réponse dans $\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$ ou dans $\left]\frac{b}{a}, +\infty\right[$:
homogène $y = \frac{\lambda}{|a\,x+b|^{\frac{1}{a}}}$; particulière : $\lambda' = A\,|a\,x+b|^{\frac{1}{a}-1}$; générale : $\boxed{y = A + \frac{\lambda}{|a\,x+b|^{\frac{1}{2}}}}$.
Raccordement possible en $-\frac{b}{a}$ possible seulement pour $\lambda = 0$ (alors $y = C^{\text{ste}} = A$).

2. Ordre 1, changement de variables

Résoudre en utilisant le changement de variables indiqué :

1. $-x^2\,z' + x\,z = z^2$ (poser $y = \frac{1}{z}$).
   Réponse dans $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$:
   on arrive à $x^2\,y' + x\,y = 1$ d'où $y = \frac{k + \ln|x|}{x}$ d'où $\boxed{z = \frac{x}{\ln(|a\,x|)}}$ pour $a \neq 0$.
   C'est prolongeable en 0 quelles que soient les valeurs de a à gauche et à droite.

3. Ordre 2, linéaires, coefs constants

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos(2x)$
2. $y'' - 2y' + y = x^2 e^{-2x}$
3. $y'' - 2y' + y = \cos x + \operatorname{ch} x$
   Réponse : $y = (a\,x + b)\,\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^{-x} + 2x^2\,\mathrm{e}^x - 4\sin x}{8}$.
4. $y'' + 3y' + 3y = x^3\,\mathrm{e}^{-x}$
   Réponse : $y = \mathrm{e}^{-3x/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) + (x^3 - 3x^2 + 6)\,\mathrm{e}^{-x}$.
5. $y'' - 2y' + y = x^2 e^{-2x}$
6. $y'' - 2\,k\,y' + (1 + k^2)y = \mathrm{e}^x \sin x$ avec $k \neq 1$.
   Réponse :
   - homogène $y = \mathrm{e}^{kx}(a\cos x + b\sin x)$;
   - particulière :
   $$y = \mathrm{e}^x(\lambda\cos x + \mu\sin x) \text{ avec } \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\frac{\alpha^2}{\alpha^4+\beta^2} \\ \mu & = & -\frac{\beta}{\alpha^4+\beta^2}, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & k-1 \\ \beta & = & k^2+2k. \end{array}\right.$$
7. $y'' - 2y' + y = x^2 e^{-2x}$
8. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos(2x)$
9. $y'' - y' + y = x^2 e^{-2x}$
10. $y'' - y' - 2y = x^2 e^{-2x}$
11. $y'' - 6y' + 9y = 2\cos x (E)$
    Réponse : $y = \frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x + (a\,x + b)\,\mathrm{e}^{3x}$.
    Pour la particulière les complexes sont bien :
    on résoud $E_{\mathbb{C}}$: $y'' - 6y' + 9y = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$
    $y = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ avec $C \in \mathbb{C}$ d'où $-C - 6\mathrm{i}C + 9C = 2 \Leftrightarrow C = \frac{1}{4 - 3\mathrm{i}} = \frac{4 + 3\mathrm{i}}{25}$
12. Résoudre $a\,y'' + b\,y' + c\,y = e^{2x}$ pour :
    a. $a = b = c = 1$ b. $a = c = 2$ et $b = 5$
    c. $a = c = 2$ et $b = -5$ d. $a = c = 1$ et $b = -2$

4. Ordre 2, linéaires, coefs variables

1. $\alpha\, x^2\, y'' = y$

   Réponse : $y = \lambda\, x^{\beta}$, avec $\beta = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\alpha}}$, valable pour $\alpha \notin]-4; 0]$.
   Distinguer $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
   Exemple de valeurs de α pour simplifier l'exercice :
   $\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\}$.

5. Ordre 2, changement de variables

1. $t^2\, y'' + 4t\, y' + 2y = 1$, poser $t = \mathrm{e}^x$.

   Réponse dans $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$:
   Méthode 1 : On pose $y(t) = z(x)$ et on remarque que $x = \ln y$, et alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= z(x) \\ y'(t) &= \frac{1}{t}\, z'(x) \\ y''(t) &= -\frac{1}{t^2} z'(x) + \frac{1}{t}\, z''(t). \end{aligned}$$

On trouve $z'' + 3z' + 2z = 1$, puis $\boxed{y = \frac{\alpha}{t} + \frac{\gamma}{t^2} + \frac{1}{2}}$.
   Méthode 2 : on peut aussi partir directement d'une forme $y = \frac{\alpha}{t} + \frac{\gamma}{t^2} + \beta$ et identifier.

6. Équas diff plus difficiles avec des valeurs absolues

6.1. $y' = |x - y|$

Cas 1 : $x \geqslant y$

On résoud $y' = x - y$ on trouve $y = x - 1 + \lambda\, \mathrm{e}^{-x}$.
On résoud $x \geqslant y$ dans ce cas, cela donne : $\lambda\, \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ et c'est vrai :

- dans $[\ln \lambda; +\infty[$ si $\lambda > 0$;
- dans tout $\mathbb{R}$ si $\lambda \leqslant 0$;

Cas 2 : $x \leqslant y$

On résoud $y' = y - x$ on trouve $y = x + 1 + \lambda\, \mathrm{e}^{x}$.
On résoud $y \geqslant x$ dans ce cas, cela donne $\lambda\, \mathrm{e}^{x} + 1 \geqslant 0$ et c'est vrai :

- dans $]-\infty; -\ln(-\lambda)]$ si $\lambda < 0$;
- dans tout $\mathbb{R}$ si $\lambda \geqslant 0$;

Conclusion : solutions sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{r} y = x - 1 + \lambda\, \mathrm{e}^{-x} \text{ pour } \lambda \leqslant 0 \\ y = x + 1 + \lambda\, \mathrm{e}^{-x} \text{ pour } \lambda \geqslant 0 \end{array}}$$

Solutions tronquées

cas	$\lambda < 0$	$\lambda > 0$
solution	$y = x + 1 + \lambda\, \mathrm{e}^{x}$	$y = x - 1 + \lambda\, \mathrm{e}^{x}$
intervalle de définition	$]-\infty; -\ln(-\lambda)]$	$[\ln \lambda; +\infty[$

6.2. $y'' + |y| = 1$

6.2.1. cas $\boxed{y \geqslant 0}$

Cela donne $y'' + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 + \lambda \cos + \mu \sin x$, qu'on peut écrire aussi plutôt :

$$\boxed{y = 1 + \rho \cos(x - \theta)}.$$

Ces fonctions sont *a priori* définies sur $\mathbb{R}$, mais on est dans le cas $y \geqslant 0$ et l'on cherche donc les ρ, θ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + \rho\cos(x - \theta) \geqslant 0.$$

C'est indubitablement vrai ssi $\boxed{\rho \leqslant 1}$.

Note : si l'on voulait des solutions tronquées (pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier), on pourrait remarquer que pour $\rho \geqslant 1$ c'est toujours possible et que, par exemple, quand $\rho \to +\infty$, l'ensemble de définition de ces solutions se rapproche de $\ldots \cup \left[\theta - \frac{\pi}{2}; \theta + \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\theta + \frac{3\pi}{2}; \theta + \frac{5\pi}{2}\right] \cup \ldots$

6.2.2. cas $\boxed{y \leqslant 0}$

Cela donne $y'' - y = 1 \Leftrightarrow y = -1 + \lambda\, e^x + \mu\, e^{-x}$ soit :

$$\boxed{y = \lambda\, e^x + \mu\, e^{-x} - 1}.$$

Ces fonctions sont *a priori* aussi définies sur $\mathbb{R}$, mais on est dans le cas $y \leqslant 0$ et l'on cherche donc les λ, μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda\, e^x + \mu\, e^{-x} - 1.$$

- Lorsque $\lambda, \mu \leqslant 0$ c'est évidemment le cas.
- Si $\lambda > 0$ alors $x \to +\infty$ montre que ça ne marche pas. De même si $\mu > 0$.

Conclusion : $\boxed{\lambda, \mu \leqslant 0}$.

Note : si l'on voulait des solutions tronquées, trouvons l'ensemble des solutions de $\lambda\, e^x + \mu\, e^{-x} - 1 \leqslant 0$ c'est-à-dire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}_*^+$ de $\lambda X^2 - X + \mu \leqslant 0$:

On trouve $\Delta = 1 - 4\lambda\mu$ et $X = \dfrac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2\lambda}$ si cela existe, donc :

- Cas où $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda\mu > \dfrac{1}{4}$:
  - Sous-cas où λ et μ positifs, alors $S_X = \emptyset$.
  - Sous-cas où λ et μ négatifs, déjà vu, $S_X = \mathbb{R}$.
- Cas où $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda\mu < \dfrac{1}{4}$:
  - Sous-cas où $\lambda > 0$, alors $S_X = \left[\dfrac{1 - \sqrt{\Delta}}{2\lambda}; \dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2\lambda}\right]$.
    - Sous-sous-cas où $0 < \Delta < 1$, alors $S_x = \left[\ln\dfrac{1 - \sqrt{\Delta}}{2\lambda}; \ln\dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2\lambda}\right]$.
    - Sous-sous-cas où $\Delta > 1$, alors $S_x = \left]-\infty; \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2\lambda}\right)\right]$.
  - Sous-cas où $\lambda < 0$, alors $S_X = \left[\dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2\lambda}; \dfrac{1 - \sqrt{\Delta}}{2\lambda}\right]$
    - Sous-sous-cas où $\Delta > 1$ alors $S_x = \left]-\infty; \ln\left(\dfrac{1 - \sqrt{\Delta}}{2\lambda}\right)\right]$.
    - Sous-sous-cas où $\Delta < 1$ alors $S_x = \emptyset$.

6.2.3. Conclusion

Si on veut des solutions définies sur $\mathbb{R}$, on a donc :

pour $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$ et θ quelconque	pour λ, μ négatifs
$y = 1 + \rho\cos(x - \theta)$	$y = -1 + \lambda\, e^x + \mu\, e^{-x}$

6.2.4. Conditions initiales

On peut aussi exprimer $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de λ, μ et regarder la zone valide du plan en mettant $f(0)$ en abscisses et $f'(0)$ en ordonnée. Cela permet de construire des énoncés avec valeur initiale, dont les solutions seront plus lisibles...

Cas particulier : $\begin{cases} y''+|y|=1 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1. \end{cases}$

7. Résolution par SE

1. Résoudre par SE : $4(1-t^2)y''-4t\,y'+y=0$.

   On trouve :
   $$a_{n+2}=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(n+1)(n+2)}a_n=\frac{\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{(n+1)(n+2)}a_n,$$
   d'où $a_{2p}=\binom{1/2}{2p}a_0$ et $a_{2p}=\binom{1/2}{2p+1}a_1$.

   On peut prendre $a_0=a_1=1$ et $a_0=-a_1=1$ pour avoir deux solutions indépendantes qui forment un système fondamental, soit $y(t)=\sqrt{1\pm t}$.
2. Résoudre par SE : $(1+t^2)y''+4t\,y'+2y=0$.

   On trouve $a_{n+2}=-a_n$ d'où en séparant termes pairs et termes impairs et en reconnaissant le DL de $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$, la solution $y=\frac{\alpha+\beta t}{1+t^2}$, *a priori* dans $]-1;1[$ puisque c'est là que la SE fonctionne, mais *a posteriori* valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Résoudre par SE : $(1+t^2)y''+4t\,y'+2y=0$.

8. Wronskien

1. Deux fonctions $a,b\colon I\to\mathbb{C}$ continues et (f,g) un système fondamental de solutions de :
   $$(E)\colon y''+a\,y'+b\,y=0.$$
   Trouver une équa diff vérifiée par :
   $$w=\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}.$$
   Réponse : $w'+a\,w=0$.