Dénombrement

Table des matières

1. Calculs de dénombrement

1. Nombre de parties d'un ensemble $\#E = n$ contenant un seul élément d'une partie de E donnée $\#A = p$ (avec donc $p \leqslant n$).

   Réponse : $p \times 2^{n-p}$

2. Anagrammes de MATHEMATIQUES (sans les accents).

   Réponse : $\dfrac{13!}{(2!)^4}$ ou $\dbinom{13}{2} \times \dbinom{11}{2} \times \dbinom{9}{2} \times \dbinom{7}{2} \times 5!$

3. Soit A l'ensemble des nombres s'écrivant usuellement avec exactement 4 chiffres.

   a. cardinal de A :

   b. nombre d'éléments de A ayant une et une seule occurence du chiffre 1 ;

   c. nombre d'éléments de A ayant une et une seule occurence du chiffre 0 ;

   d. nombre d'éléments de A ayant quatre chiffres distincts ;

   e. nombre d'éléments de A ayant au moins un 0 mais aucun chiffre $\geqslant 1$ en double.

4. **Nombre de chemins**

   a) On pose $A(0;0)$ et $B(4;3)$, on demande le nombre de chemins de A vers B qui suivent le quadrillage (constitué des $x=k$ et des $y=k$ où k décrit $\mathbb{Z}$) et qui ne descendent ni ne reculent jamais vers la gauche.

   b) Recommencer ensuite avec $B(n,p)$.

   Réponse :

$$\binom{n+p}{n}$$

5. Vous êtes directeur du tournoi de Roland Garros. Il y a $2n$ joueurs inscrits en simple. De combien de façons $f(n)$ pouvez-vous organiser le premier tour?

   Réponse 1 :
$$\binom{2n}{2}\times\binom{2n-2}{2}\times\ldots\times\binom{2}{2}=\frac{(2n)!}{2^n},$$
   mais il faudra diviser par $n!$ sinon par exemple $(AB)(CD)$ et $(CD)(AB)$ sont comptés comme deux donc $f(n)=\dfrac{(2n)}{2^n\times n!}$.

   Réponse 2 : le premier joueur sur la liste peut avoir $(2n-1)$ adversaires, une fois ces deux rayés de la liste le premier joueur de la liste restante peut avair $(2n-3)$ adversaires donc :
$$f(n)=(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times3\times1=\frac{(2n)}{2^n\times n!}.$$

6. Pour deux entiers $k\geqslant0$ et $n\geqslant1$, on pose $a_{n,k}$ le nombre de $n-$ uplets $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ d'entiers naturels vérifiant $x_1+\ldots+x_n=k$ donné. Montrer que :
$$a_{n,k}=\binom{n+k-1}{k}.$$
   Réponse : On vérifie pour $n=1$ puis on a tout de suite $a_{n+1,k}=\sum_{j=0}^{k}a_{n,k-j}$ (on somme sur la valeur possible de x_{n+1}, si elle vaut j alors $x_1+\cdots+x_n=k-j$).

   Ensuite, on écrit qu'il faut, pour l'hérédité, calculer $\sum_{j=0}^{k}\binom{n+k-j-1}{k-j}$:

   on remarque alors que $\binom{n+k-j-1}{k-j}=\binom{n+k-j}{k-j}-\binom{n+k-j-1}{k-j-1}$ et la somme est télescopique et vaut $\binom{n+k}{k}-0$ cqfd.

7. Nombre de couples $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$ tels que $A\cap B=\emptyset$, avec $E=\{1,\ldots,n\}$.

   Réponse : on somme suivant $k=$taille de A, alors on trouve :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}=3^n,$$
   qu'on pouvait trouver directement : chaque élément de E est soit dans A, soit dans B, soit dans aucun des deux.

   Variante : nombre de couples $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$ tels que $A\subset B$

   C'est pareil, c'est égal au nombre de couples $(A,\ \bar{B})$ avec $(A,\ B)$ tels que précédemment ; autrement dit, chaque $e\in E$ est soit dans A, soit dans $B\backslash A$, soit dans aucun des deux.

2. Calculs par dénombrement

1. **Récurrence du triangle de Pascal**

   Démontrer que $\dbinom{n}{p}+\dbinom{n}{p+1}=\dbinom{n+1}{p+1}$ par le calcul, puis par dénombrement.

2. **Formule du pion**

   Démontrer par le dénombrement que $k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$.

   Réponse : On dénombre le nombre de parties à k élément de $\{x_1;\ldots;x_n\}$ contenant x_1, il y en a $\binom{n-1}{k-1}$.

   On ajoute cela pour tous les x_i, on obtient $n\binom{n-1}{k-1}$ on a comptabilisé toutes les parties à k éléments, sauf que chaque élément a été comptabilisé k fois d'où $n\binom{n-1}{k-1}=k\binom{n}{k}$.

   Cette formule se démontre aussi, directement, et facilement.

3. Le triangle de Pascal

3.1. Somme des diagonales montantes

Démontrer que pour tout $k \geqslant 0$:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k-i}{i} = u_k,$$

où (u_n) désigne la suite de Fibonacci $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases}$.

3.2. Somme des diagonales descendantes

Calculer $\binom{15}{4} + \binom{14}{3} + \binom{13}{2} + \binom{12}{1} + \binom{11}{0}$ puis $\binom{n}{p} + \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} + \ldots + \binom{n-p}{0}$

Réponse : grâce à l'écriture $\binom{v}{u} = \binom{v+1}{u} - \binom{v}{u-1}$ on a une somme télescopique qui donne $\binom{n+1}{p}$

3.3. Somme d'une ligne, un terme sur deux

3.3.1. Par combinaison entre la somme et la somme alternée

La suite $u_n = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ est la moyenne des deux suites $a_n = C^{\text{ste}} = 1$ et $b_n = (-1)^n$ et donc on a $S_n = \sum_{i=0}^{n} \left[\binom{n}{i} u_i\right] = \frac{2^n + 0}{2} = 2^{n-1}$.

3.3.2. Par dénombrement

Montrer que :

$$\sum_k \binom{n}{2k} = \sum_k \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Indication : Considérer $E = [|1; n|]$ et e par exemple un élément fixé de E (par exemple $e = 1$). Soit φ: $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ qui à $A \subset E$ associe $A \backslash \{e\}$ ou $A \cup \{e\}$ selon si e est ou non dans A.

Réponse : Alors, φ étant clairement injective et aussi surjective, on en déduit que globalement E a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

3.4. Somme verticale

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

   Réponse : récurrence sur n, facile, un schéma et un exemple s'imposent :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & \mathbf{1} & & & & \\ 1 & \mathbf{2} & 1 & & & \\ 1 & \mathbf{3} & 3 & 1 & & \\ 1 & \mathbf{4} & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & \mathbf{10} & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5. Interversion d'un $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$

Soit (x_n) une suite donnée. On pose $y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$. Démontrer que :

$$(-1)^n x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_k.$$

Réponse : C'est un exercice de double somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k y_k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x_j\\ &= \sum_{j=0}^{n}x_j\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}\binom{n}{k}(-1)^k\\ &= \sum_{j=0}^{n}x_j\sum_{k'=0}^{n-j}\frac{(-1)^{k'}(-1)^j}{(n-k'-j)!\times(k')!}\\ &= \sum_{j=0}^{n}x_j\,(-1)^j\frac{1}{(n-j)!}\sum_{k'=0}^{n-j}\binom{n-j}{k'}(-1)^{k'}\end{aligned}$$

et $\sum_{k'=0}^{n-j}\binom{n-j}{k'}(-1)^{k'}$ vaut 0 ssi $j<n$ et 1 ssi $j=n$.

3.6. Démontrer que $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

3.6.1. Par le dénombrement

Réponse : On partitionne un ensemble A à $2n$ éléments en deux ensembles fixes B et C à n éléments. Toute partie K à n éléments de A peut être décomposée en $K\cap B$ union $K\cap C$. On a tout de suite :

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

3.6.2. Par le polynôme $(1+x)^{2n}$

Réponse : $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\times(1+x)^n$, regarder le terme en x^n.

4. Jeux de cartes

1. Dans un jeu de 52 cartes, on demande le nombre de mains de 5 cartes :
   a. total ; réponse $\binom{52}{5}$
   b. contenant 1 et un seul as ; réponse $4\times\binom{48}{4}$
   c. contenant au moins 1 valet ; réponse $\binom{52}{5}-\binom{48}{5}$
   d. contenant au moins un roi et au moins une reine ;
   réponse $\underbrace{\binom{52}{5}}_{\text{tout}}-\left(\underbrace{\binom{48}{5}}_{\text{aucun roi}}+\underbrace{\binom{48}{5}}_{\text{aucune reine}}-\underbrace{\binom{44}{5}}_{\text{ni roi ni reine}}\right)$

5. Géométrie

1. Nombre maximal A_n d'intersections entre les diagonales d'un polygone convexe à n sommets.

   Réponse : on ne comptabilisera pas les sommets.

   De chaque sommet partent $n-3$ diagonales, donc il y a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

   Le nombre d'intersections est le nombre de couples de diagonales, qui vaut *a priori* $\binom{\frac{n(n-3)}{2}}{2}$ sauf que les sommets ont été comptés, et même plusieurs fois, et plus exactement $\binom{n-3}{2}$ fois. La réponse est donc :

$$\begin{aligned}A_n &= \binom{\frac{n(n-3)}{2}}{2}-\binom{n-3}{2}\\ &= \frac{n(n-3)}{8}\times(n^2-7n+14).\end{aligned}$$

2. Nombre a_n de régions du plan délimitées par n droites $d_1, \ldots, d_n$ (on suppose aucun couple de droites parallèles, et aucun triplet de droites concourrantes).
   Réponse :
   $a_1 = 2$ et d_{n+1} coupe 1 fois chaque d_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui subdivise d_{n+1} en $n+1$ intervalles, chacun d'entre eux rajoutant exactement 1 région.
   Partant de là, on a $a_{n+1} = a_n + (n+1)$, d'où :
$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

6. Applications

1. Nombre de bijections φ sur $\{1, \ldots, 12\}$:
   a. total ; Réponse : $12!$
   b. vérifiant $\varphi(\text{pair}) = \text{pair}$; Réponse : $(6!)^2$
   c. vérifiant φ(multiple de 3)=multiple de 3 ; Réponse : $4! \times 8!$
   d. vérifiant les deux points précédents. Réponse : $2! \times 2! \times 4! \times 4!$
2. Nombre d'applications φ sur $\{1, \ldots, 12\}$:
   a. total ; Réponse : 12^{12}
   b. vérifiant $\varphi(\text{pair}) = \text{pair}$; Réponse : $6^6 \times 12^6$
   c. vérifiant φ(multiple de 3)=multiple de 3 ; Réponse : $4^4 \times 12^8$
   d. vérifiant les deux points précédents. Réponse : $2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$
3. Nombre de surjections de $A = \{1, \ldots, n+1\}$ sur $B = \{1, \ldots, n\}$.
   Réponse :
$$\underbrace{n}_{\text{choix du } b \text{ particulier}} \times \underbrace{\binom{n+1}{2}}_{\text{choix des deux antécédents de } b} \times \underbrace{(n-1)!}_{\text{le reste}} = \frac{n\,(n+1)!}{2}$$
4. Nombre de surjections de $A' = \{1, \ldots, n+2\}$ sur $B = \{1, \ldots, n\}$.
5. Soit un ensemble $\# E = n$ et soit P_k^n le nombre de partitions de E en k classes.
   a. Montrer que $P_k^n = P_{k-1}^{n-1} + k\, P_k^{n-1}$.
   b. Calculer en fonction de P_k^n le nombre de surjections de E sur F avec $\# E = n$ et $\# F = p$.

   Réponses :
   a. On fixe $a \in E$. Alors P_{k-1}^{n-1} partitions contiennent $\{a\}$ tout seul dans sa classe, et $k\, P_k^{n-1}$ partitions ont pour a une classe de cardinal $\geqslant 2$ (on partitionne $E \backslash \{a\}$ en k classes et on choisit l'une d'elles pour accueillir a.
   b. Il y a $p! \times P_k^n$ surjections de $E \rightarrow F$.
6. Nombre de surjections de $A = [|1, n+1|]$ vers $B = [|1, n|]$
   Réponse :
   - n possibilités pour le b particulier ;
   - $\binom{n+1}{2}$ possibilités pour les deux antécédents de b ;
   - $n!$ possibilités pour le reste.
7. Nombre de surjections de $A = [|1, n+2|]$ vers $B = [|1, n|]$

Réponse :

- si deux b ont chacun deux antécédents : $\binom{n}{2} \times \binom{n+2}{2} \times \binom{n}{2} \times (n-2)!$;
- si un b a trois antécédents : $n \times \binom{n+2}{3} \times (n-1)!$
- total : $\dfrac{(n+2)!}{24} \times (3n^3 - 6n^2 + 3n + 4)$.

8. Nombre d'injections de $[|1, n|]$ dans $[|1, n+p|]$
   Réponse : $\binom{n+p}{n}$
9. Nombre d'applications/de fonctions de $[|1, n|]$ dans $[|1, n|]$.
   n^n applications / $\sum_p \binom{n}{p} n^{n-p}$ fonctions.