1. Uniforme continuité

1. $f\colon \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\forall x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n\,x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

   (On peut aussi présenter l'énoncé avec juste $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$.)

   Réponse : On prend $\varepsilon > 0$ et le α correspondant. Soit n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|f(n\,\alpha)| \leqslant \varepsilon$, alors pour tout $x \geqslant n_0\,\alpha$, soit n_x tel que $n_x\,\alpha \leqslant x < (n_x + 1)\alpha$ alors :

   $$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(n_x\alpha)| + |f(n_x\,\alpha)| \leqslant 2\varepsilon.$$

   Remarque 1. La propriété reste vraie quand f est simplement continue.

   Preuve par l'absurde : supposons un $\varepsilon > 0$ et une (x_n) croissante divergente telle que pour tout n, $f(x_n) > \varepsilon$, alors par continuité on a des $I_n = [a_n, b_n]$ d'intérieur non vide sur lesquels $f(x) > \varepsilon/2$ avec $a_n \to +\infty$ et $b_n \to +\infty$.

   Partons de $[a_1, b_1]$, déployons-le en $[k\,a_1, k\,b_1]$, les déploiements, pour k assez grand, finissent par se chevaucher donc vont englober un des $\overset{\circ}{I_n}$ c'est-à-dire qu'on aura des $k_1, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $[k_1\,a_1, k_1\,b_1] \cap [a_{n_1}, b_{n_1}]$ contient un intervalle non trivial $[\mu, \lambda]$. Posons $[a_2, b_2] = [\mu/k_1, \lambda/k_1]$ alors pour tout $x \in [a_2, b_2]$ on a $f(k_1\,x) > \varepsilon/2$.

   Recommençons le processus par récurrence en imposant $k_2 > k_1$.

   Par principe de compacité dans $\mathbb{R}$, on a $\bigcap\limits_i [a_i, b_i] \neq 0$, donc soit c là-dedans, alors on a une suite strictement croissante d'entiers (k_i), de limite donc $+\infty$, et tels que pour tout i, on a $f(k_i\,x) > \varepsilon/2$, ce qui contredit l'hypothèse.

   Remarque 2. La propriété est fausse pour f non continue.

   Preuve : prenons f la fonction caractéristique de $R = \{(1 + \sqrt{p})^n, n \in \mathbb{N}\}$ où p vaut 2 ou tout autre entier qui n'est pas un carré parfait.

   Soit $x > 0$ alors un seul $k\,x$, pour $k \in \mathbb{N}$, est au plus dans R.

   En effet, si $\begin{cases} k\,x = (1+\sqrt{p})^n \\ k'\,x = (1+\sqrt{p})^{n'} \end{cases}$ alors par quotient on a un $(1+\sqrt{p})^m \in \mathbb{Q}$ or $(1+\sqrt{p})^m = a + b\,\sqrt{p}$

   Par conséquent, pour tout $x > 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n\,x) = 0$.

2. $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue est aussi continue.

3. Heine : f continue sur $[a, b]$ est u.c.

   Preuve séquentielle : si $x_n - y_n \to 0$, dans $[a, b]$ on a un $x_{\varphi(n)} \to \ell$ et $y_{\varphi(n)} \to \ell$ contradictoire avec la continuité si $f(y_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.

4. $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue, montrer que $\exists a, b \geqslant 0$ tels que $\forall x \geqslant 0$, $|f(x)| \leqslant a\,x + b$.

   Soit $\varepsilon = 1$ et le η correspondant, alors $|f(\eta) - f(0)| < 1$ donc.. $|f(n\eta) - f(0)| < n$ et tout x est dans un $[n\,\eta, (n+1)\,\eta]$ donc $|f(x) - f(0)| < n + 1$ donc $\eta|f(x) - f(0)| < x + 1$.

5. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et ayant des limites finies en $\pm\infty$.

   a. Mq f bornée.

   b. Mq f u.c. sur $\mathbb{R}$.

      Soit $\varepsilon > 0$, on prend $[a, b]$ tel qu'en dehors $f(x)$ confiné dans un intervalle de rayon $\varepsilon/2$, et sur $[a - 1; b + 1]$, Heine nous donne un η et on prend ensuite $\mathrm{Min}(\eta, 1)$.

   c. d. Mq si $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f$ alors f admet un max ou un min

      Soit $\ell = \lim\limits_{\pm\infty} f$ et soit x tel que $f(x) \neq \ell$, supposons $x > \ell$ alors soit $[a, b]$ tel qu'en dehors de cet intervalle $f(x)$ confiné dans $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ avec $\ell + \varepsilon < x$ alors, $[a, b]$ étant compact...

6. **Recollement de fonctions u.c. :**

   a. Si f u.c. sur $[0; 5]$ et sur $[2; 10]$ montrer que f u.c. sur $[0; 10]$.

      On prend simplement $\mathrm{Min}\{\alpha_{[0;2]}; \alpha_{[1;3]}; 3\}$...

   b. Si f u.c. sur $]0; 1]$ et sur $[1; 2[$ alors elle l'est sur $]0; 2[$

      On applique Heine sur $[1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon]$ puis on recolle.

   c. Si f continue et périodique sur $\mathbb{R}$, Mq f est u.c. sur $\mathbb{R}$.

   d. S'il existe un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en dehors duquel f est lipschitzienne, alors f est u.c. sur $\mathbb{R}$.

(fréquemment utilisé dans les exemples « u.c. et dérivée ».)

On fait Heine sur le compact $[a-1;b+1]$ et Lipschitz en dehors, et on recolle.

7. **u.c. et dérivée** : Si f est dérivable et f' non bornée, peut-on en déduire que f est non u.c. ?

   Non, pas automatiquement, ça dépend sur quelles plages f' est « grande ».

   Exemples :

   a. La fonction $x \to \sqrt{x}$ a une dérivée non bornée dans $]0;+\infty[$, pourtant elle y est u.c.. Preuve : elle est lipschitzienne sur $[1;+\infty[$ et u.c. par Heine sur $[0;2]$ ensuite on recolle.

      Pour le dire « avec les mains », sa dérivée est non bornée là où Heine s'applique.

   b. La fonction $x \to \sin(x^2)$ est-elle u.c. sur $\mathbb{R}$?

      Non car c'est au voisinage de $\pm\infty$ que sa dérivée est non bornée. Prendre $x_n = \sqrt{n\pi}$ et $y_n = \sqrt{n\pi + \pi/2}$.

   c. Anecdote : Mq la fonction $x \to x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée en 0 est u.c. sur $\mathbb{R}$.

      Ici on est dans le cas d'une dérivée non convergente en 0 (mais bornée).

      En $\pm\infty$, sa dérivée est bornée donc en dehors d'un certain compact la fonction est lipschitzienne puis on recolle.

8. **Exemples de fonctions u.c. ou pas :**

   a. Mq ni $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$ ni $g(x) = \ln x$ sur $]0;+\infty[$ ne sont u.c.

      $\frac{e^{x+\alpha} - e^x}{\alpha} = \left(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\right) \times e^x$ et $x \to +\infty$ à α constant, n'est pas borné quand x varie.

      de même pour $\frac{\ln(x+\alpha) - \ln(x)}{\alpha} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)}{\alpha}$ et $x \to 0$.

   b. Mq $f(x) = x^2$ n'est pas u.c. sur $\mathbb{R}$.

      On prend $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{2n}$.

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue croissante bornée, montrer que f est u.c. sur $\mathbb{R}$.

   Par l'absurde, supposons que f n'est pas u.c. Soit le ε récalcitrant.

   Prenons $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

   Par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$ donné, on peut trouver, en dehors de $\bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, y_i]$ (puisque dedans elle est u.c. par Heine), un couple $x_n \leqslant y_n$ tels que $0 \leqslant y_n - x_n \leqslant \frac{1}{n}$ et $|f(y_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$.

   Alors posons $\bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, y_i] = [a_n, b_n]$, on a $n\varepsilon < \sum_{i=0}^{n} (f(y_n) - f(x_n)) \leqslant f(b_n) - f(a_n)$ par croissance, et si $n \to \infty$, c'est contradictoire avec f bornée.

   Nécessité des 3 hypothèses :

   - si f pas continue, prendre le signal $\chi_{\mathbb{R}^+}$ et $x_n = -y_n = 1/n$;
   - si f pas croissante, prendre $f(x) = \sin(x^2)$;
   - si f pas bornée, prendre $f(x) = e^x$.

10. **Composition de fonctions u.c. :**

    a. Si f et g sont u.c., alors $f \circ g$ l'est aussi.

    b. Trouver $f \circ g$ u.c. avec g qui ne l'est pas $\sqrt{x^2}$ ou f qui ne l'est pas $(\sqrt{x})^2$.

    c. Trouver $f \circ g$ u.c. avec ni f ni g u.c. $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = x^2$.

    d. Si $f :]0; +\infty[\to]0; +\infty[$ est u.c., est-ce que e^f non : prendre $f(x) = x$, $\ln f$ non : prendre $f(x) = x$, $\sqrt{f}$ à voir... le sont ?