Continuité

Table des matières

On trouvera aussi des exercices sur ce thème dans le fichier `fonctions_sur_0_1` du dossier `fonctionsR_R`.

1. Continuité simple

1.1. Divers

1. Montrer que toute f continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

   Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.
3. Soient f et g deux fonctions.
   a. Simplifier l'écriture de la fonction $u(x) = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$.
   b. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues, les fonctions $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ le sont aussi.
4. Soient $f, g: [a,b]\to\mathbb{R}$ continues. On suppose que : $\forall\in[a,b]$, $f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k>1$ tel que $f > kg$.

   Sur $[a,b]$ compact, $\dfrac{f}{g}$ a un minimum $k>1$...
5. Soit $f: I\to\mathbb{R}$. Si $f\nearrow$ et si f surjective, alors f est continue.

   Si $f\nearrow$ alors f possède en tout a une limite à droite $d(a)$ et une limite à gauche $g(a)$. Soit un éventuel a tel que $d(a)\neq g(a)$ alors :
   - soit $d(a) > g(a)$ auquel cas f n'est pas surjective ;
   - soit $d(a) < g(a)$ auquel cas f n'est pa croissante.

   Remarque : cet exercice utilise la propriété que f croissante $\Rightarrow$ f réglée, qui se démontre facilement à l'aide de la notion de borne sup/borne inf.
6. **Fonction de limite finie aux bornes**
   a. Montrer que f continue sur $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes.
   b. Si f continue sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$, montrer que f est bornée ; atteint-elle ses bornes ?

      Il y a un $]-\infty; A]$ dans lequel $f(x)$ est dans un $[\ell-1; \ell+1]$ et un $[B; +\infty[$ dans lequel $f(x)$ est dans un $[\ell'-1; \ell'+1]$ et en considérant les deux ensembles :
      $$\left\{\ell+1; \ell'+1; \operatorname*{Max}_{[A,B]} f(x)\right\} \text{ et } \left\{\ell-1; \ell'-1; \operatorname*{Min}_{[A,B]} f(x)\right\},$$
      on a respectivement un majorant et un minorant de f.

      Elle n'atteint pas nécessairement ses deux bornes (exemple $f(x) = \arctan x$)
   c. Et si f est à valeurs sur $\mathbb{R}^+$ au lieu de $\mathbb{R}$?

Sur $[0;+\infty]$ plus difficile à trouver : $f(x)=(1-\mathrm{e}^{-x})\sin x$, ses bornes sont -1 et $+1$ et elle n'atteint aucune des deux.

d. Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{-\infty} f$, alors f admet un max ou un min.

Soit $\ell=\lim\limits_{\pm\infty} f$ et soit x tel que $f(x)\neq\ell$, supposons $x>\ell$ alors soit $[a,b]$ tel qu'en dehors de cet intervalle $f(x)$ confiné dans $[\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon]$ avec $\ell+\varepsilon<x$ alors, $[a,b]$ étant compact...

1.2. Fonctions « à échelles »

1. f continue dans $[0;+\infty[$ et sans valeur interdite. On suppose que pour tout $x\geqslant 0$, on a $\boxed{f(x)=f(x^2)}$. Montrer que f est constante. Ce résultat est-il toujours valable si f n'est plus supposée continue ?

   Pour tout $x>0$ et tout $n\geqslant 1$, $f(x)=f(x^{1/2^n})$ or $x^{1/2^n}\xrightarrow[n]{}1$ d'où, par continuité en 1 : $f(x)=f(1)$ et par continuité en 0 on conclut $\forall x\geqslant 0, f(x)=f(1)$..

   Maintenant, pour f non continue on peut avoir $f(x)=a$ dans $]0;1[$ et $f(x)=b$ dans $]1;+\infty]$, et $f(0)$ et $f(1)$ quelconques, c'est-à-dire que n'importe quelle fonction f réglée en 1 convient.

   Mais on peut avoir pire, par exemple $f(n)=n$ pour tout entier n et du coup il y a des sortes de « faisceaux » qui sont les $F_n=\{n^{2^p}, p\in\mathbb{Z}\}$ et tels que $\forall u\in F_n, f(u)=n$ et tous ces faisceaux ont 1 comme valeur d'adhérence.

2. a) f continue en 0 telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\boxed{f(x)=f(2x)}$. Montrer que f est constante.

   b) le résultat reste-t-il valable si f est seulement supposée prolongeable par continuité en 0 ?

   a)Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, la suite $\left(f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right)$ est constante or si f continue cette suite a une limite en 0 (qui est $f(0)$) et qui est donc la même pour tous les x.

   b) Dans ce cas, on a $f(x)=C^{\text{ste}}$ sur $\mathbb{R}^*$ seulement et f se prolonge à une fonction consante.

2. PROLONGEMENTS PAR CONTINUITÉ

1. On pose :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(e^{x-1}-1)}{x-1} & \text{si } x<1\\[2mm] \dfrac{\sqrt{6x-5}-b}{x-1} & \text{si } x>1\end{cases}.$$

   f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Discuter selon a et b.

   Réponse : $b=1$ sinon $\lim\limits_{1^+} f$ est infinie, et $a=1$ pour recoller.

2. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$a(x)=\sin x\times\sin\dfrac{1}{x}$	$b(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$	$c(x)=x^2\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
$d(x)=x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$g(x)=x\,(1-\ln^2 x)$	$h(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$
$j(x)=(e^x+2x)^{1/x}$	$k(x)=\left(1+\dfrac{5}{3x^2}\right)^{x^2}$	$\ell(x)=\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$

   Réponses partielles :

- par les gendarmes on a $\lim\limits_{0} a=0$ donc a prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{(-1)^\pm} b=\pm\infty$ non prolongeable ; $\lim\limits_{1^\pm} b=\dfrac{-1}{2}$ prolongeable ;
- par les gendarmes on a $\lim\limits_{0} c=0$ donc c est prolongeable en 0 mais reste discontinue sur $\left\{\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}$;
- par les limites usuelles on a $\lim\limits_{0} g=0$.
- par taux d'accroissement appliqué à $f(x)=\sin x-\cos x$ on a $\lim\limits_{\pi/4} h=\sqrt{2}$.

- dans $[0,1[$ on a $\ell(x)=\sqrt{x}$ donc $\lim\limits_{0^+}\ell=0$ et dans $[-1,0[$ on a $\ell(x)=-1+\sqrt{x+1}$ donc $\lim\limits_{0^-}\ell=0$.

3. La fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. La fonction $l(x)=(1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est-elle prolongeable en 1 et -1 ?

3. Points fixes

On trouvera aussi des exercices sur ce thème dans le fichier `fonctions_sur_0_1` du dossier `fonctionsR_R`.

1. Soit $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ continue et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell<1$.
   a. Montrer que l'équation $f(x)=x$ a au moins une solution.
      Si $f(0)>0$, vu qu'il existe x tel que $\dfrac{f(x)}{x}<(\ell+\varepsilon)<1$, on applique les valeurs intermédiaires à $f(x)-x$. Si $f(0)=0$ c'est plié.
   b. Et si l'on suppose seulement $\ell=1$?
      Alors prendre $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$...
2. Soit $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ continue décroissante, montrer que f a un unique point fixe.
   Si f n'a pas de point fixe alors $f(x)-x$ garde un signe constant, contradictoire avec la décroissance (si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-x>0$, alors soit $f(x)$ donné, on a $f(x)>x$ mais donc par décroissance : $f(f(x))\leqslant f(x)$ puis les valeurs intermédiaires).
   Remarque : Il suffit d'avoir une suite vérifiant $\dfrac{f(x_n)}{x_n}\to\ell$ pour que l'énoncé marche.
3. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f\circ f$ admet un point fixe, montrer que f admet un point fixe.
   Cela veut dire que il existe (a,b) tels que C_f passe par (a,b) et par (b,a) aussi donc $f(x)-x$ change de signe entre a et b et on applique les valeurs intermédiaires.

4. Divers

4.1. Utilisation de la borne sup

1. Montrer que f monotone $\Rightarrow$ f réglée (f a partout une limite à gauche et une limite à droite).
2. f continue sur $\mathbb{R}$ vérifie pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)^2=1$. Montrer que $f(x)=C^{\text{ste}}$.
   si $a<b$ et $f(a)=-1$ et $f(b)=+1$ alors soit $c=\operatorname{Sup}\limits_{[a,b]}\{x/\,f(x)=-1\}$, on montre facilement que f est discontinue en c.

4.2. Théorie de la continuité

1. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant :
   - l'image d'un segment est un segment ;
   - pour tout $y\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est un fermé.

   Montrer que f est continue.
   Réponse : *par l'absurde... suppposons f non continue en a, alors*
2. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, montrer l'équivalence entre :
   a. f continue sur $\mathbb{R}$ au sens séquentiel (si $x_n\to a$, alors $f(x_n)\to f(a)$) ;
   b. f continue au sens des ε (pour tout réel a, $\forall\varepsilon>0$, il existe un intervalle $]a-\mu,a+\mu[$ dans lequel $|f(x)-a|<\varepsilon$) ;
   c. pour tout fermé $F\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ est fermé ;
   d. pour tout ouvert $F\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ est ouvert.

   Réponse :
   - $a\Rightarrow b$ car le contraire de b revient à dire qu'il existe une suite (x_n) de limite a et telle que $f(x_n)$ est en dehors d'un certain ouvert contenant a, on vient de montrer que $\neg b\Rightarrow\neg a$;
   - $b\Rightarrow a$ car pour tout $\varepsilon>0$, à partir d'un certain n, x_n est dans le $]a-\mu,a+\mu[$ correspondant.