Complexes

Table des matières

Dans toute la feuille, on appelle par une lettre minuscule l'affixe d'un point nommé par une lettre majuscule, exemple, p désignera implicitement l'affixe du point P. On assimilera aussi le point et l'affixe, et par exemple si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, on s'autorisera à parler de l'image par f du point M pour dire : « l'image par f de l'affixe m de M ».

1. Équations

1.1. Équations avec un module $|u(z)|$

1. Résoudre $|z+z^2|=1$ dans le cas où $|z|=1$.
   Réponse : $|z|\times|z+1|=1\Leftrightarrow|z+1|=1$ donc intersection de deux cercles.
2. $|z^2-2z|=1$.
   Réponse : on trouve $z=1\pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/4}\sqrt{2}\sqrt{\cos\frac{\theta}{2}}$ avec $\theta\in[-\pi;\pi]$...
3. Résoudre $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=2$.
   Réponse :
   - Si $|z|=1$, on trouve $|2\cos\theta|=2$ d'où $z=\pm1$.
   - Sinon $z+\dfrac{1}{z}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Leftrightarrow z^2-2\,z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1=0$. On trouve $\Delta'=2\,\mathrm{i}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ puis, dans le cas par exemple où $\sin\theta>0$:
   $$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\pm\sqrt{2\sin\theta}\,e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},$$
   et leur conjugué.

1.2. Divers

1. Résoudre $\left(\dfrac{z-1}{\mathrm{i}z}\right)^2\in\mathbb{R}$.
   Réponse : cela revient à résoudre $(1+k)\,z^2-2z+1=0$ avec $k\in\mathbb{R}$ d'où :
   $$\begin{cases} z=\dfrac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{k}}{1+k} & \text{pour} \quad k\geqslant 0\\ z=\dfrac{1\pm\sqrt{k}}{1+k} & \text{pour} \quad k<0\end{cases}$$
2. Résoudre $z^2+|z|+1=0$
   Réponse : z^2 doit être réel <0 donc z doit être imaginaire pur :
   $z=k\,\mathrm{i}$ avec k réel alors $-k^2+k+1=0$, d'où $k=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
3. On donne $a>0$. Résoudre :
   a. $|z+1|^2+|z-1|^2=a$.
   b. $|z+1|^2-|z-1|^2=a$.
4. Calculer $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)$.
5. Résoudre $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^3=\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha}$ où $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Réponse :

- Pour l'argument on a $\arg\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha}\right)=2\alpha$ donc $\arg\left(\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)=\dfrac{2\alpha}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}$.
- Pour le module on a $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha}\right|=1\Rightarrow\left|\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right|=1$ donc z réel, z s'écrit $z=\tan\theta$ avec un certain $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.
- Conclusion : $2\theta=\dfrac{2\alpha}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{k\pi}{3}$ donc :

$$S=\left\{\tan\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right),k\in\{0,1,2\}\right\}.$$

Autre méthode :
$\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ d'où $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}=j^k\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\alpha}{3}}$, soit $z=\mathrm{i}\dfrac{1-j^k\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha/3}}{1+j^k\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha/3}}$, on doit pouvoir se ramener au résultat précédent.

6. On pose $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$ et $\begin{cases}a=u+u^2+u^4\\ b=u^3+u^5+u^6\end{cases}$. Calculer $a+b$, puis a^2, puis a et b.

   Réponse : $a+b=-1$ puis $a^2=-2-a$ d'où $a=\dfrac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$.

   On regarde $\Im(a)=\underbrace{\sin\dfrac{2\pi}{7}}_{>0}+\underbrace{\sin\dfrac{4\pi}{7}+\sin\dfrac{8\pi}{7}}_{=2\sin\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}>0}>0$ d'où $a=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ et $b=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$

7. Résoudre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^kz^k=0$.

8. Pour $a\in\mathbb{R}$ donné, résoudre de deux manières différentes :

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}(E).$$

Réponse :

- On applique $\tan(3\theta)=\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^3\theta}$ et l'on pose $\begin{cases}x=\tan\theta\\ a=\tan\alpha\end{cases}$ d'où :

$$\begin{aligned}E&\Leftrightarrow\tan(3\theta)=\tan(3\alpha)\\&\Leftrightarrow\theta=\alpha+k\frac{\pi}{3},\end{aligned}$$

  qu'on peut simplifier encore par :

$$\begin{aligned}x&=\tan\theta\\&=\tan\left(\arctan a+k\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{a+\tan\left(k\frac{\pi}{3}\right)}{1+a\tan\left(k\frac{\pi}{3}\right)},\end{aligned}$$

  d'où :

$$S=\left\{a;\frac{a\pm\sqrt{3}}{1\pm a\sqrt{3}}\right\}.$$

- On peut factoriser par $(x-a)$ et on aboutit à :

$$S=\left\{a;\frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2};\frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}\right\}.$$

9. Montrer que pour tous $u,v\in\mathbb{C}$:

$$|u+v|+|u-v|\geqslant|u|+|v|.$$

Réponse : on utilisera $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+a\,\bar{b}+\bar{a}\,b$.
c'est équivalent à :

$$\begin{aligned} & (|u+v|+|u-v|)^2 \geqslant (|u|+|v|)^2 \\ \Leftrightarrow\ & |u+v|^2+|u-v|^2+2|u+v|\times|u-v| \geqslant |u|^2+|v|^2+2|u|\times|v| \\ \Leftrightarrow\ & |u|^2+|v|^2+2|u^2-v^2| \geqslant 2\,|u|\times|v| \\ \Leftrightarrow\ & (|u|-|v|)^2+2|u^2-v^2| \geqslant 0, \text{ ce qui est vrai.} \end{aligned}$$

10. $z=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$, donner module et argument de z en fonction de a.
    Réponse : $|z|=2(1+\cos a)$ et $\arg(z)$ a pour tangente $\tan\dfrac{a}{2}$.
    Cet exercice utilise l'angle moitié.
11. Résoudre $z^2+\bar{z}+1=0$.
    Réponse : cela donne :

$$\begin{cases} x^2-y^2+x+1=0 \\ 2x\,y-y=0. \end{cases}$$

La seconde équation nous amène à $y=0$ ou $x=1/2$.
On remplace alors dans la première :

- pour $y=0$ cela donne $x^2+x+1=0$ avec $\Delta<0$ mais x réel : impossible ;
- pour $x=1/2$ cela donne $7/4-y^2=0 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{7}/2$.

Conclusion :

$$S=\left\{\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2};\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right\}.$$

2. Quelques lignes trigo

2.1. Lignes de $\pi/12$

1. En remarquant que $\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$, déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. En déduire $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
   Réponse :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) &= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) &= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

   Et, par expression conjuguée, on a $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$.
2. Détermination directe de $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$:
   a. Par la formule $\tan(2a)=\dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$ en prenant $a=\dfrac{\pi}{12}$.
      Réponse : si $x=\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, on a alors $x^2+2\sqrt{3}\,x-1=0$ on trouve $x\in\left\{2-\sqrt{3};\right.$ $\left.-2-\sqrt{3}\right\}$, l'autre racine est $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}\right)$.
   b. Par la formule $\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\cdot\tan(b)}$, en prenant $\begin{cases} a=\frac{\pi}{3} \\ b=\frac{\pi}{4}. \end{cases}$
      Réponse : on trouve directement $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$.
3. Dans un carré $ABCD$, placer M sur $[AB]$ et N sur $[AD]$ tels que CMN équilatéral, calculer AM et en déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

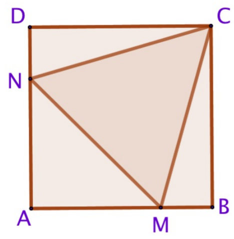

Figure 1.

4. Dans un carré $ABCD$, placer E tel que ABE équilatéral et regarder le triangle ECD.

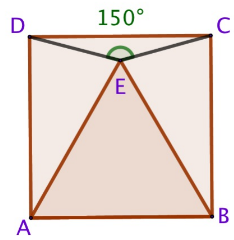

Figure 2. Les angles $\hat{C}$ et $\hat{D}$ de CED mesurent $\frac{\pi}{12}$.

5. On pose $a = \dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$ et $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$:
   a. donner la forme cartésienne de a, puis celle de $a\,b$;
   b. donner la forme exponentielle de a, puis celle de $a\,b$;
   c. en déduire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$.

2.2. Lignes de $\pi/5$

2.2.1. Méthode 1

1. Développer $(x-2)(x+1)(x^2+x-1)$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} x^2 = y+2 \\ y^2 = x+2 \end{cases}$.
3. On pose $a = e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{5}} + e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{5}}$ et $a = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}} + e^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$. Déterminer a et b en utilisant les questions précédentes.
4. En déduire les lignes trigonométriques de $\dfrac{\pi}{5}$ et de $\dfrac{2\pi}{5}$.

2.2.2. Méthode 2

Résoudre $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ de deux manières différentes.

1. En pensant aux suites géométriques, on a $S = \{k, k^2, k^3, k^4\}$ où $k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$.
2. En posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$ après avoir divisé par z^2, on trouve :

$$S = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} ; \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \right\}$$

2.2.3. Méthode 3

Voir fichier `trigo1eS` dans le dossier `trigo` du site `Maths-Lycée`.

Soit θ l'angle de $[0;\pi]$ dont le cosinus est $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. Calculer $\cos(2\theta)$, puis $\cos(4\theta)$.
2. En déduire une équation vérifiée par θ, puis la valeur de θ.

On trouve $\cos(4\theta)=2\cos^2(2\theta)-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos(\theta)$ d'où rapidement $5\theta=0$ d'où $\boxed{\theta=\dfrac{2\pi}{5}}$.

2.3. Lignes de $\pi/8$

On passe par $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8})^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ puis second degré d'où :

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.\end{cases}$$

2.4. Lignes de $\pi/24$

- Par $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/24})^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$ on arrive à un $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$...
- Par $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{8}$ on arrive à $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/8}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/24}$ d'où :

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{1}{8}\left(-\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).\end{cases}$$

- Par $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{8}$ on aurait les lignes de $\dfrac{5\pi}{24}$.

3. Autour de j

On donne $j=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. En utilisant cette forme cartésienne :
   a. simplifier $\dfrac{1}{j}$ (penser à multiplier en haut et en bas par le conjugué)
   b. calculer j^2, j^3, et simplifier
2. Montrer que $j^3=1$ par $(a+b)^3$ et le remontrer par la forme expo.
3. Montrer que $j^2=\overline{j}$ par la forme cartésienne puis par la forme expo
4. Simplifier $\dfrac{1}{j}$ de trois manières différentes :
   a. par la forme cartésienne avec expression conjuguée ;
   b. par la forme expo ;
   c. puis en se servant de $j^3=1$.
5. Calculer $1+j+j^2$ de deux manières différentes :
   a. par les cartésiennes.
   b. par la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\beta^k$.

4. Racines carrées & Second degré dans $\mathbb{C}$

4.1. Calcul de racines carrées

Trouver les racines carrées des complexers suivants :

1. $\Delta = 3 - 4\mathrm{i}$. Réponse : on résoud $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2\,x\,y = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$, on trouve $\delta = \pm(2 - \mathrm{i})$.
2. $\Delta = 1 + \mathrm{i}$.
3. $\Delta = 2 + 3\mathrm{i}$.
4. $\Delta = 2 - 3\mathrm{i}$.
5. $\Delta = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{\sqrt{3} - \mathrm{i}}$. Réponse : $\delta = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/24}$.

4.2. Second degré dans $\mathbb{C}$.

1. Résoudre $z^2 - (6 + \mathrm{i})z + (11 + 13\mathrm{i}) = 0$
   Réponse : on trouve $\delta^2 = -9 - 40\mathrm{i}$ donc $\delta = \pm(4 - 5\mathrm{i})$ d'où $S = \{1 + 3\mathrm{i}, 5 - 2\mathrm{i}\}$.
2. Résoudre $\dfrac{z^2}{4} + 2\mathrm{i}\,z - 5 - i = 0$

5. Racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$

5.0.1. Divers

1. Résoudre $(z - 1)^n = (z + 1)^n$.
   On trouve $\dfrac{z - 1}{z + 1} = \omega_n \Leftrightarrow z = \dfrac{-1 - \omega_n}{\omega_n + 1}$ avec ω_n une racine n-ième de l'unité.
   En factorisant comme il faut on trouve $z = \mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\,\dfrac{k\pi}{n}$.
2. Résoudre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k z^k = 0 (E)$
   Réponse :
   - pour $z = -1$, cela ne fait pas zéro ;
   - dans $\mathbb{C} \backslash \{-1\}$: $E \Leftrightarrow \dfrac{1 - (-1)^n z^n}{1 + z} = 0 \Leftrightarrow 1 - (-z)^n = 0 \Leftrightarrow z = -\mathrm{e}^{\frac{2k\mathrm{i}\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.

5.0.2. Racines de l'unité

1. Prouver que :
   $$\prod_{k=1}^{n-1} (X - w_k) = \frac{X^n - 1}{X - 1},$$
   où les w_k désignent les racines n-ièmes de l'unité : $w_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.
   Réponse : il suffit de remarquer qu'à droite c'est un polynôme aussi, et d'en considérer les racines.
2. Application :
   Si $P_0\,P_1 \ldots P_{n-1}$ est un polygone régulier sur le cercle unité, calculer $\prod_{k=1}^{n-1} P_0\,P_k$, où $P_i\,P_j$ représente la longueur de la diagonale $[P_i\,P_j]$.
   Réponse :
   - on peut faire à la main les premiers cas :

n	produit
2	2
3	$\lvert j - 1\rvert^2 = 3$
4	$2 \times \sqrt{2}^2 = 4$

;

- cas général : $\prod_{k=1}^{n-1}|1-w_k|=|P(1)|$ avec $P(X)=\frac{X^n-1}{X-1}=1+X+X^2+\ldots+X^{n-1}=n$.

6. FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

6.1. Avec $\cos(a+b)$

6.1.1. Divers

1. Résoudre, pour $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}\cos(a)+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0\\ \sin(a)+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0.\end{cases}$$

Réponse : On utilise $\cos a+\cos b$ et $\sin a+\sin b$:

$$\begin{cases}\cos(a)+2\cos\left(a+\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)=0\\ \sin(a)+2\sin\left(a+\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)=0.\end{cases}$$

On aboutit rapidement à :

$$\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)=0 \text{ pas valable}$$
$$\text{ou}$$
$$\tan(a)=\tan\left(a+\frac{x+y}{2}\right),$$

donc à : $\dfrac{x+y}{2}\equiv 0[\pi]\Leftrightarrow x+y\equiv 0[2\pi]$.

L'équation est alors :

$$\begin{cases}\cos a+2\cos a\cos x=0\\ \sin a+2\sin a\cos x=0.\end{cases}$$

On peut toujours simplifier soit par $\cos a$ soit par $\sin a$ d'où $\cos x=-\dfrac{1}{2}$.

Ainsi :

$$S=\left\{\left(\frac{2\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\right);\left(-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)\right\}.$$

2. Résoudre les équations suivantes :

a. $e^{i\theta}+e^{i\theta'}=\sqrt{3}$.

Réponse : $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$ réel donc $\theta=-\theta'$ ou $\theta=\pi+\theta'$.

- si $\theta=-\theta'$ alors $2\cos\theta=\sqrt{3}\Leftrightarrow\theta=\pm\dfrac{\pi}{3}$;
- si $\theta=\pi+\theta'$ alors $e^{i\theta}+e^{i\theta'}=0\ldots$

b. $e^{i\theta}+e^{i\theta'}=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Réponse : $2\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\times\sin(\theta-\theta')=\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-i\pi/12}$ donc :

$$\begin{cases}\sin(\theta-\theta')=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \theta+\theta'=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\theta-\theta'=\dfrac{\pi}{3}\text{ ou }\dfrac{2\pi}{3}\\ \theta+\theta'=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\theta,\theta')=\left(\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{12}\right)\text{ ou }\left(\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{4}\right)$$

6.1.2. Écriture réduite de $a\cos\theta + b\sin\theta$

1. Classique : résoudre $\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{6}\sin 2x = 2 (E)$.

   Réponse : $\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ donc :
$$\begin{aligned} E &\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,\Re(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}) = 2 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x \equiv -\frac{\pi}{12}[2\pi] \text{ ou } 2x = -\frac{7\pi}{12}[2\pi] \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{7\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{5\pi}{24}; \frac{11\pi}{24}\right\}. \end{aligned}$$

2. Plus original : résoudre $3\sqrt{3}\cos x - 9\sin x = 3\sqrt{3}$:

   a. avec la méthode classique (en utilisant la forme expo de $a = 3\sqrt{3} - 9\mathrm{i}$) ;

   b. en divisant par $\cos x$ et en utilisant $1 + T^2 = \frac{1}{C^2}$.

   Réponse : on trouve $x \in \{0; -\frac{2\pi}{3}\}$ mais avec la méthode b. il y a un passage au carré et l'on trouve à la fin $x = 0, \pi$,

6.2. (Anti)linéarisations

6.2.1. Linéarisations

1. $\cos^2 x =$
2. $\sin^2 x =$
3. $\cos x \sin x =$
4. $\cos^2 x \sin x = \frac{1}{4}(\sin(3x) + \sin(x))$
5. $\cos x \sin^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$
6. $\sin^3 x =$
7. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos x)$
8. $\sin^4 x =$
9. $\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + \cos(4x) + 4\cos(2x))$
10. $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin x)$
11. $\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos x)$

6.2.2. Antilinéarisations

1. $\cos(2x) =$
2. $\sin(2x) =$
3. $\cos(3x) = 3\cos x - 2\cos^3 x$
4. $\sin(3x) =$
5. $\cos(4x) = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.
6. $\sin(4x) = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$.

6.2.3. Divers - calculs d'intégrale

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x$.

6.3. Divers

1. Résoudre $\tan x \tan 2x = 1$.

   Réponse : on se ramène à résoudre $2T^2 = 1 - T^2 \Leftrightarrow T = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ d'où $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{6}; \pm\frac{5\pi}{6}\right\}$.

7. Géométrie du plan

7.1. Triangles

7.1.1. Exercices avec des coordonnées

1. $A(2;5)$ et $B(-1;3)$, trouver les $M(x,y)$ tels que ABM équilatéral.

   Réponse : $z = a + e^{\pm i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ d'où $z = \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}\right) + \left(4 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$.

2. Idem avec $A(0;2)$ et $B\left(-1; -\sqrt{3}\right)$.

   Réponse avec ABM direct : $z = \left(1-\sqrt{3}\right)i + \left(1+\sqrt{3}\right)$.

7.1.2. Exercices plus généraux

1. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   - (A) a, b, c équilatéral direct ;
   - (B) $a + b\,j + c\,j^2 = 0$;
   - (C) $a^2 + b^2 + c^2 = b\,c + a\,c + a\,b$;
   - (D) $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} = 0$.

   Réponse :
   - $A \Leftrightarrow B$: le grand « Z » autour de l'angle $\hat{B}$ donne :
   $$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b} = e^{i\pi/3} = -j^2 \\ &\Leftrightarrow a + (-j^2 - 1)\,b + j^2\,c = 0. \end{aligned}$$
     et l'on sait que $1 + j + j^2 = 0$.
   - $A \Leftrightarrow C$: le grand « Z » autour de deux angles quelconques donne :
   $$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c} \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a-c) = (b-c)(c-b) \\ &\Leftrightarrow a^2 - a\,b - a\,c + b\,c = b\,c - c^2 - b^2 + b\,c\ldots \end{aligned}$$
   - $C \Leftrightarrow D$: dans (D), on met tout au même dénominateur.

2. a, b, c de module 1 et $a + b + c = 0$. Que dire du triangle a, b, c ?

   Réponse :

   On suppose $a = 1$, et l'on pose $\begin{cases} b = e^{i\theta} \\ c = e^{i\theta'} \end{cases}$ et l'on arrive à du $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = -1$, donc avec les formules d'addition de cos et de sin :
   $$\begin{cases} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) = 0, \end{cases}$$
   d'où $\begin{cases} \theta = \theta' + \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \theta = -\theta' + 2k\pi \end{cases}$ on distingue les deux cas et l'on aboutit à a, b, c équilatéral.

   On pouvait aussi remarquer que b et $1-b$ sont de module 1, or il n'y a que deux éléments de U dont la translation par $z \to z - 1$ est aussi sur U ce sont les $e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.

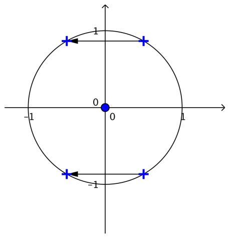

Figure 3. Éléments z du cercle-unité U tels que $z-1\in U$.

7.2. Longue-vues

Ces exercices me font penser à des longue-vues car on y parle de l'angle que fait une ouverture $[AB]$ vue depuis un point M.

7.2.1. Un exemple

On pose $f(z)=\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$

1. Lieu des z lorsque :
   a. $f(z)$ réel ;
   b. $f(z)$ imaginaire pur ;
   c. $|f(z)|=1$.

   Réponse : Vu que $f(z)=\dfrac{-\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}-z}$, on a le mathoscope de f :

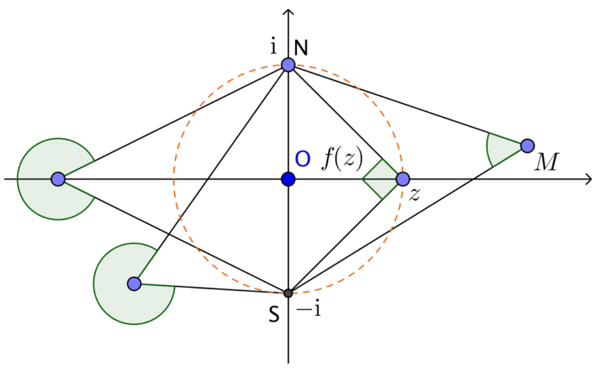

Figure 4.
$\arg(f(z))$ peut être vu comme l'angle sous lequel on voit $[-\mathrm{i};\mathrm{i}]$ depuis z ;
tandis que $|f(z)|$ est le rapport $\dfrac{MN}{MS}$.

   donc :
   a. $f(z)$ réel $\Leftrightarrow \arg(f(z))=\pm\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow z$ sur le cercle unité (privé de i) ;
   b. $f(z)$ imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(f(z))=k\pi \Leftrightarrow z$ sur l'axe vertical (privé de i) ;
   c. $|f(z)|=1 \Leftrightarrow MN=MS \Leftrightarrow z$ sur l'axe horizontal.

2. Montrer que f réalise une bijection de $D=\{z,|z|<1\}$ sur $P=\{z,\Re(z)<0\}$.
   Éléments de réponse :
   - L'injectivité se montre par le calcul : $f(z)=f(z')\Leftrightarrow\ldots$ on trouve vite $z=z'$.
   - La bijectivité peut aussi se montrer en établissant l'expression de f^{-1} :

$$f^{-1}(z)=\frac{\mathrm{i}(z+1)}{z-1}.$$

- Les arguments géométriques du mathoscope ci-dessus permettent de montrer que D est envoyé sur P.
- On peut aussi calculer $\Re(f(z)) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) = \frac{|z|^2 - 1}{|z - \mathrm{i}|^2} < 0$ sur D.

7.3. Lieux

1. Lieu $\mathcal{L}$ des z tels que :

   a. $1, z, z^2$ alignés.

   Réponse : $\frac{z^2 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

   b. $1, z, z^2$ rectangle.

   Réponse :

   - en 1 : $\frac{z^2 - 1}{z - 1} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \Leftrightarrow z + 1 \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -1 + k\,\mathrm{i}, k \in \mathbb{R}$.
   - en z : $\frac{z^2 - z}{1 - z} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \Leftrightarrow z = k\,\mathrm{i}, k \in \mathbb{R}$.
   - en z^2 : $\frac{1 - z^2}{z - z^2} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{z} + 1 \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \Leftrightarrow z = \frac{1}{-1 + k\,\mathrm{i}}, k \in \mathbb{R}$ cercle.

   c. z, z^2, z^4 alignés.

   Réponse : ils sont alignés ssi $\exists k \in \mathbb{R} \,/\, z^2 + z - k = 0$ d'où :

$$\mathcal{L} = \left\{ -\frac{1}{2} + \mu; -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\mu, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

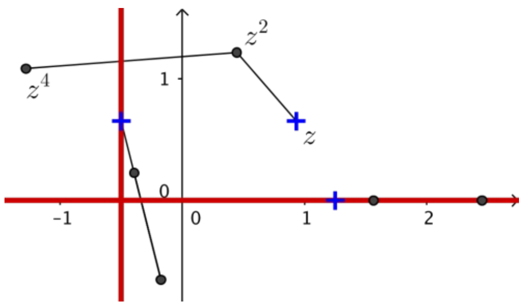

Figure 5. Exemples de z, z^2, z^4.

.

   d. $z, \frac{1}{z}, -\mathrm{i}$ alignés.

   e. $z, -\frac{1}{z}, -\mathrm{i}$ alignés.

   Réponse : on trouve $z^2 + \mathrm{i}(1 - k)\,z + k = 0$ d'où $z = \frac{\mathrm{i}(k-1)}{2} \pm \mathrm{i}|k - 1|$ d'où $y = 2|x + 1|$.

8. Inversion

8.1. Inversion canonique $f(z) = \frac{1}{z}$

Dans cette section, on appelle f la fonction $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{z}$.

8.1.1. Calculs simples

1. Simplifier $f(x+i\,y)$, $f(r\,e^{i\theta})$.
2. Calculer et simplifier $f(1+i)$, $f(i)$, $f\left(\frac{i}{2}\right)$, $f\left(-\sqrt{3}+3i\right)$.

8.1.2. Image de la droite d'équation $x=a$ (a réel quelconque)

Montrer que c'est le cercle $\mathcal{C}\left(\text{centre}\left(\frac{1}{2a},0\right),\text{rayon}\,\frac{1}{2a}\right)$.

Indication : simplifier $\left|\dfrac{1}{a+i\,k}-\dfrac{1}{2a}\right|$ par mise au même dénominateur.

8.1.3. Image de la droite D: $a\,x+b\,y+c=0$

On détermine le point de D le plus proche de O et on le nomme K.

1. Montrer que :
$$k=-\frac{c(a+\mathrm{i}\,b)}{a^2+b^2}=-\frac{c}{a-\mathrm{i}b}.$$
2. Montrer que la distance entre O et D est :
$$OK=\frac{|c|}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$
3. Montrer que l'image par f de k est :
$$k'=-\frac{(a-i\,b)}{c}.$$

On pourrait montrer que l'image par f de D est le cercle de diamètre $[OK']$.

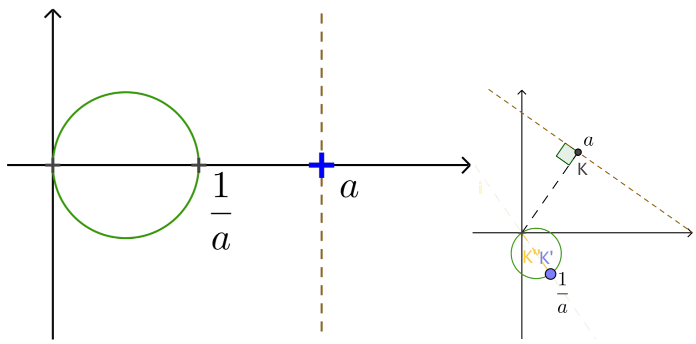

Figure 6. Droites qui s'échangent en cercles par f.

8.2. Homographies

Les homographies complexes $f(z)=\dfrac{a\,z+b}{c\,z+d}$ peuvent se ramener à des écritures $f(z)=A+\dfrac{B}{z-C}$ et donc, il y aura intuitivement des cercles qui s'échangeront en des droites, ou des disques en des demi-plans.

9. Sommes trigo

1. On pose $\theta\not\equiv 0[2\pi]$, prouver que :
$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/2}\,\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$
En déduire $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\,\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\,\theta)$.

On peut aussi demander $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\,\theta+\theta_0)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\,\theta+\theta_0)$.

2. Calculer, pour $a, b\in\mathbb{R}$:
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a\,k+b).$$
Réponse : $\Re(\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}a})^n)$. *On peut poser cet exo pour* $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ *ayant une forme expo simple.*

3. Simplifier $S(\theta)=\cos^4(\theta)+\cos^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^4\left(\theta+\frac{2\pi}{4}\right)+\cos^4\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)$.

   Réponse : $\cos^4 x=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$ donc $S(\theta)=C^{\text{ste}}=\frac{3}{2}$.

4. Simplifier $f_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n}\sin^3(k\,\theta)$ pour $\theta=\frac{\pi}{3}$.
   Réponse : $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{3}\sin(3x)$ donc :
$$\begin{aligned}
f_n(\theta) &= \frac{3}{4}\sum\sin(k\,\theta)-\frac{1}{4}\sum\sin(3\,k\,\theta)\\
&= \frac{3}{4}\sin\left(n\,\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}-\frac{1}{4}\sin\left(3n\,\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left((n+1)\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}.\\
f_n\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{3}{2}\sin\left(n\,\frac{\pi}{6}\right)\sin\left((n+1)\,\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

5. Simplifier $f_n(a)=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour $a\in\mathbb{R}$.
   Réponse : on peut donner comme indication $\cos a\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4}$.
   Il faut multiplier en commençant par la fin :
$$f_n(a)\times 2\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)=f_{n-1}(a)\times\frac{1}{2}\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)=\ldots$$

10. HYPERBOLES

Notations :
k désigne un réel positif qu'il faudra déterminer.
φ désigne la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Autrement dit, pour tout $z\in\mathbb{C}$:
$$\varphi(z)=e^{i\frac{\pi}{4}}z$$
On considère les quatre ensembles suivants :

- la courbe $\mathcal{A}_1$ de $f_1(x)=\frac{1}{x}$;
- la courbe $\mathcal{A}_3$ de $f_2(x)=-\frac{1}{x}$;
- la réunion $\mathcal{A}_4$ des deux courbes de $g_1(x)=\sqrt{x^2-k}$ et de $g_2(x)=-\sqrt{x^2-k}$;
- la réunion $\mathcal{A}_2$ des deux courbes de $h_1(x)=\sqrt{x^2+k}$ et de $h_2(x)=-\sqrt{x^2+k}$.

1. Déterminer la valeur de k pour que la distance entre O et chacun de ces ensembles soit la même.
2. Montrer que l'image de $\mathcal{A}_1$ par φ est $\mathcal{A}_2$.
   Indication : Calculer Y^2-X^2, où $X+\mathrm{i}Y$ est l'image de $x+\mathrm{i}y\in\mathcal{A}_1$.
3. Montrer de même que, pour tout $i\in\{1,2,3\}$, on a $\varphi(\mathcal{A}_i)=\mathcal{A}_{i+1}$.