Janvier

1. $f'(x)=3x^2-1$, donc $y=-x$ donc $f(x)-y=x^3$: C_f dessous à gauche et dessus à droite de 0.
2. $z=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ donc $z^3=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2(-1+\mathrm{i})$.

   ou bien $z^2=2\mathrm{i}$ donc $z^2\times z=2\mathrm{i}-2$.
3. $p(X=2)=\binom{10}{2}\times\frac{1}{2^{10}}=\frac{10\times 9}{2}\times\frac{1}{2^{10}}=\frac{45}{2^{10}}\approx 0,045$ car $2^{10}=1014\approx 1000$.
4. $f'(x)=2\frac{\ln x}{x}$ donc $f'(\mathrm{e})=\frac{2}{\mathrm{e}}$ donc $y=\frac{2}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+1=\frac{2}{\mathrm{e}}x-1$.
5. $f'(x)=\mathrm{e}^{-2x}(1-2x)$ donc $f''(x)=\mathrm{e}^{-2x}(-2-2+4x)=4\mathrm{e}^{-2x}(x-1)$.
6. $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$ donc $z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=8\mathrm{i}$.
7. $p(X=3)=\binom{10}{3}\times\frac{3}{10^{10}}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}\times\frac{1}{2^{10}}=\frac{15}{2^7}$ un peu plus petit que $0,15$ car $2^7=128$.
8. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ donc $f'(\sqrt{\mathrm{e}})=\frac{1/2}{\mathrm{e}}$ donc $y=\frac{1/2}{\mathrm{e}}(x-\sqrt{\mathrm{e}})+\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}=\frac{x}{2\mathrm{e}}$.
9. $f'(x)=2x\ln x+2x$ donc $f''(x)=2\ln x+4$ nul en $\ln x=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.
10. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
11. $\sum_{k=1}^{10}\binom{11}{k}=\sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}-2=2^{11}-2=2046$.
12. Équivaut à $X^2+2X-3=0$ avec $X=x^2$ d'où $X\in\{-1;3\}$ d'où $x=\pm\sqrt{3}$ (et aussi deux solutions complexes $z=\pm\mathrm{i}$).
13. $|\cos x|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $S=\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$.
14. $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2)$ d'où $f''(x)=\mathrm{e}^{x^2}(2x+2x+4x^3)=4x\mathrm{e}^{x^2}(1+x^2)$.
15. $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})=1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}=1+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.
16. $(x^2-1)^2\leqslant 1\Leftrightarrow x^2-1\in[-1;1]\Leftrightarrow x^2\in[0;2]\Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.
17. $z^3=8\mathrm{i}\Leftrightarrow z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2\\ \arg z=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow z\in\{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6};2\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6};2\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2}\}$.
18. Il est formé de quatre triangles rectangles isométriques ayant un angle de $\frac{\pi}{12}$ et une hypoténuse de 4 donc ayant chacune une aire de $\frac{1}{2}\times 4^2\times\cos\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{\pi}{12}=4\times\sin\frac{\pi}{6}=2$ d'où l'aire du losange égale $2\times 4=8$.
19. Il n'y a que le terme où $\ln x$ est dérivé qui ne s'annulera pas pour $x=1$ donc :

    $f'(1)=1\times\frac{1}{1}\times\sin 1\times\mathrm{e}^1=\mathrm{e}\times\sin(1)$.
20. $\prod_{k=2}^{5}2^k=2^{\sum_{k=2}^{5}k}=2^{\frac{5\times(5+1)}{2}-1}=2^{14}$.
21. $b^2=\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}-\mathrm{i}=\frac{3}{4}-\mathrm{i}$ donc $a\times b^2=(2+3\mathrm{i})\left(\frac{3}{4}-\mathrm{i}\right)=\frac{1}{4}(2+3\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})$ ce qui donne $a\times b^2=\frac{1}{4}(6+12+9\mathrm{i}-8\mathrm{i})=\frac{1}{4}(18+\mathrm{i})$.
22. Sarrus : $\det\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}=0+0+0-0-8-1=-9$.

23. Cube inscrit, soit a son côté : $a\sqrt{3}=2R$ par Pythagore ;
cube circonscrit, b son côté : $b=2R$ donc le rapport demandé est :

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{1}{\sqrt{3}^3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{24+12+4+1}{24}=\frac{41}{24}.$

25. $\begin{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$

26. $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

27. $\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}=\dfrac{6}{\frac{52\times 51}{2}}=\dfrac{12}{52\times 51}=\dfrac{3}{13\times 51}$ on calcule $13\times 51=13\times 50+14=664$ d'où $\dfrac{3}{664}$.

28.

i	x
	0
1	1
2	5
3	14 donc 43
4	43+16= $\boxed{59}$

.

29. $f(f(f(1)))=f(f(2))=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{5}{3}.$

30. $f(x)=x^{-3/2}$ donc $f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^{-5/2}$ donc $f''(x)=\dfrac{15}{4}x^{-7/2}=\dfrac{15}{4x^3\sqrt{x}}.$

31. $\dfrac{\binom{48}{1}\times\binom{4}{2}}{\binom{52}{3}}=\dfrac{48\times 6}{\frac{52\times 51\times 50}{6}}=\dfrac{48\times 6\times 6}{52\times 51\times 50}=\dfrac{48\times 2\times 6}{52\times 17\times 50}=\dfrac{48\times 6}{52\times 17\times 25}=\dfrac{12\times 6}{13\times 17\times 25}.$