Arithmétique

Table des matières

1. Calculs effectifs

1.1. Équations de Bezout

Résoudre :

1. $95x+71y=46$;

   Réponse : $\begin{cases} x=67-71k \\ y=-89+95k. \end{cases}$

2. $20x-53y=3$;

   Réponse : $\begin{cases} x=24+53k \\ y=9+20k. \end{cases}$

3. $12x+15y+20z=7$;

   Réponse : $\begin{cases} x=-49+20k-5m \\ y=49-20k+4m \\ z=-7+3k. \end{cases}$

4. Trouver les coefficients de Bezout de 594 et 210.

   Voir à construire exercices numériques de ce genre avec xxx.dcode.fr.

   On trouve $210\times 17-594\times 6=6$.

1.2. Systèmes dans $\mathbb{Z}$

Résoudre :

1. $\begin{cases} x+y=56 \\ x\vee y=105. \end{cases}$

Réponse 1 : on pose $\left\{\begin{smallmatrix} d=x\wedge y \\ m=x\vee y \end{smallmatrix}\right.$ alors $\left\{\begin{smallmatrix} d|105=3\times5\times7 \\ d|56=2^3\times7 \end{smallmatrix}\right.$ donc $d\in\{1;7\}$.

- si $d=1$ alors x et y sont solutions de $u^2-56u+105=0$ mais ce trinôme n'a pas de racines entières.
- si $d=7$ alors x et y sont solutions de $u^2-56u+735=0$ dont les solutions sont 21 et 35.

On vérifie que $\boxed{\{x,y\}=\{21,35\}}$ fonctionne.

Réponse 2 : on divise tout par 7 et on résoud $\left\{\begin{smallmatrix} x'+y'=8 \\ x'\vee y'=15, \end{smallmatrix}\right.$ même raisonnement on aboutit à $\{x',y'\}=\{3,5\}$.

2. $\left\{\begin{array}{l} x\wedge y=x-y \\ x\vee y=72. \end{array}\right.$

Réponse : on pose $(x,y)=d\times(x',y')$ avec $d=x\wedge y$ alors le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} 1=x'-y' \\ x'y'=\frac{72}{d}, \end{array}\right.$$

et donc y' et $y'+1$ sont diviseurs de 72 et donc $y'\in\{1,2,3,8\}$.

- $y'=1$ donne $\{x,y\}=\{36,72\}$.
- $y'=2$ donne $\{x,y\}=\{24,36\}$.
- $y'=3$ donne $\{x,y\}=\{18,24\}$.
- $y'=8$ donne $\{x,y\}=\{8,9\}$.

$$\boxed{S=\{\{36,72\},\{24,36\},\{18,24\},\{8,9\}\}}.$$

1.3. Divers

1. Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 56 \\ x\vee y &=& 105. \end{array}\right.$$

Réponse : on pose $d=x\wedge y$ alors $d|56\wedge105=7$:

- si $d=1$ on résoud $\left\{\begin{smallmatrix} x+y &=& 56 \\ x\times y &=& 105 \end{smallmatrix}\right.$: $S=\emptyset$ car 679 n'est pas un carré parfait ;
- si $d=7$ on résoud $\left\{\begin{smallmatrix} x+y &=& 56 \\ x\times y &=& 735 \end{smallmatrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{smallmatrix} \frac{x}{d}+\frac{y}{d} &=& 8 \\ \frac{x}{d}\times\frac{y}{d} &=& 15 \end{smallmatrix}\right.$ d'où $(x,y)=(3\times7,5\times7)=(21,35)$.

2. Trouver les (x,y) entiers tels que :

$$\sum_{k=1}^{x}k!=y^2.$$

Indication : Supposer $k\geqslant5$ et raisonner sur le chiffre des unités du Σ.

Réponse : $1!+2!+3!+4!=3(10)$ et si $k\geqslant5$ alors $k!=0(10)$ donc pas de solution pour $x\geqslant4$.

On examine alors les cas $x=1,2,3$ et on trouve :

- $x=1$ donne le couple $(x,y)=(1,1)$;
- $x=2$ donne $3=y^2$ impossible ;
- $x=3$ donne $9=y^3$ d'où $(x,y)=(3,3)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $3x^3+x\,y+4y^3=349$.

Réponse :
déjà $x^3\leqslant116$ donc $x\leqslant4$;
de même $y^3\leqslant87$ donc $y\leqslant4$;
si $y=0$ alors $x^3\notin\mathbb{N}$;
selon les valeurs de $y=1,2,3,4$ on va aboutir à une équation en x sur laquelle on va essayer $x=1,2,3,4$ et seule la dernière va donner une solution qui fonctionne :

$y=1\Rightarrow 3x^3+x=345\ldots$ $\quad$ $y=2\Rightarrow 3x^3+2x=317\ldots$ $\quad$ $y=3\Rightarrow 3x^3+3x=241\ldots$
et pour $y=4$ on a $3x^3+4x=93$ avec $x=3$ qui marche donc $\boxed{(x,y)=(3,4)}$.

4. Touver les entiers multiples de 30 possédant 12 diviseurs.
   Réponse : ce sont les $n=2^\alpha\,3^\beta\,5^\gamma\times 7^\delta\times 11^\varepsilon\ldots$ avec α, β, $\gamma\geqslant 1$, on trouve vite que $\delta=\varepsilon=\ldots=0$ et l'on a $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=12$ d'où $n\in\{60,90,150\}$.
5. n^2 possède trois fois plus de diviseurs que n, déterminer n :
   a. en supposant que n n'admet que 2 et 3 comme facteurs premiers
   b. étudier les autres cas... à finir
6. a,b des entiers de produit 11 340 et possédant six diviseurs communs. Trouver a et b.
   Réponse : on a $11\,340=2^2\times 3^4\times 5\times 7$ donc $a\wedge b=18$ donc $\{a,b\}=\{18\times 5, 18\times 7\}$.

1.4. Base n

1. On pose $u_n=10\ldots01_2$ (n occurences du chiffre 0). Calculer en base 2 l'expression de :
   a. $(u_n)^2$
   Réponse : $(u_n)^2=2^{2n+2}+2^{n+2}+1=1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-1\\ \text{zéros}}}1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n+1\\ \text{zéros}}}1_2$.
   b. $(u_n)^3$
   Réponse : $(u_n)^3=1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-1\\ \text{zéros}}}1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-1\\ \text{zéros}}}1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-1\\ \text{zéros}}}1_2$.
   c. $(u_n)^4$ (on supposera $n>1$).
   Réponse : $(u_n)^4=2^{4n+4}+2^{3n+5}+2^{2n+5}+1=1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-2\\ \text{zéros}}}1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-1\\ \text{zéros}}}111\underbrace{0\ldots0}_{\substack{2n+4\\ \text{zéros}}}1$
   d. $(u_n)^8$ (on supposera $n\geqslant 4$).
   Réponse : le $n\geqslant 4$ sert à assurer que les coef sont bien dans l'ordre strictement croissant.
   Sauf erreur !...
   $(u_n)^4=2^{8n+8}+2^{7n+10}+2^{6n+10}+2^{6n+9}+2^{6n+8}+2^{5n+10}+2^{4n+8}+2^{4n+6}+2^{4n+5}+2^{3n+8}+1$ donc $(u_n)^4=1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-3\\ \text{zéros}}}1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n\\ \text{zéros}}}111\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-3\\ \text{zéros}}}1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-3\\ \text{zéros}}}1011\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-4\\ \text{zéros}}}1\underbrace{0\ldots0}_{\substack{3n+6\\ \text{zéros}}}$

2. Raisonnement modulo m

2.1. Avec des carrés parfaits

1. Chercher les entiers $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $\sum_{k=1}^{a}k!=b^2$.
   Réponse : on raisonne modulo 5 ou modulo 10.
   Exemple modulo 5 :

a	$1!+\ldots+a!$
1	1
2	3
3	4
4	3
$\geqslant 4$	3

et

b	b^2
1	1
2	4
3	4
4	1
0	0

donc les solutions sont à chercher parmi $a\in\{1;3\}$.
   Le cas $a=1$ donne $(a,b)=(1,1)$ comme réponse possible.
   Le cas $a=3$ donne $a=b=3$ d'où :

$$\boxed{S=\{(1,1);(3,3)\}}.$$

2. La somme de trois carrés parfaits ne peut pas être de la forme $7+8n$.

Réponse : modulo 8 on a :

n	0	1	-1	2	-2	3	-3	4
n^2	0	1	1	4	4	1	1	0

On veut que la somme de trois entiers de la ligne du bas fasse $7 \equiv -1$ modulo 8, c'est impossible.

3. La somme de cinq carrés parfaits consécutifs ne peut elle-même être un carré parfait.
   Réponse : $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2+2)$, il s'agit de voir si n^2+2 peut déjà avoir un facteur 5, pour cela on raisonne modulo 5 :

$n (\bmod 5)$	0	1	2	3	4
$n^2+2 (\bmod 5)$	2	3	-1	2	3

on voit que n^2+2 n'est jamais multiple de 5 donc $5(n^2+2)$ ne peut être un carré parfait.

2.2. Divers

1. Si p et $8p^2+1$ sont premiers, alors $8p^2-1$ aussi.
   Réponse : on raisonne modulo 3 :
   - si $p=3$ alors $8p^2+1$ et $8p^2-1$ sont premiers ;
   - si $p = \pm 1 (\bmod 3)$ alors $8p^2+1 = 9 (\bmod 3)$ donc non premier : les hypothèses ne sont pas respectées.
2. Montrer que, modulo 7, la suite $u_n = 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ est constante.
   Réponse : il est facile de montrer par récurrence que modulo 7, on a $\begin{cases} 4^{2^n} = (4,2,4,2\ldots) \\ 2^{2^n} = (2,4,2,4\ldots) \end{cases}$.
3. **Division d'une congruence**
   Si $k\,x \equiv k\,y [n]$, peut-on affirmer que $x \equiv y[n]$?
   Réponse : on écrit : $\exists c \in \mathbb{N} / k\,x - k\,y = n\,c$. À partir de là :
   - Si $k \wedge n = 1$ alors $k|c$ par Gauss donc $x - y = \left(\frac{c}{k}\right) n$ donc $x \equiv y[n]$:
     $\boxed{\text{Si } k \wedge n = 1, \text{ on peut diviser par } k}$.
     Exemple : $10 \times 4 \equiv 10 \times 7[3]$ alors $4 \equiv 7[3]$ (on n'a pas touché au 3).
   - Si $k|n$, alors $x - y = \left(\frac{n}{k}\right) c$ donc $x \equiv y\left[\frac{n}{k}\right]$:
     $\boxed{\text{Si } k|n, \text{ on peut diviser par } k \text{ à condition de diviser le } n \text{ aussi par } k}$.
     Exemple : $10 \times 4 \equiv 10 \times 7[30]$ alors $4 \equiv 7[3]$
   - Si $k \wedge n = d$ alors $k|n\,c \Rightarrow \frac{k}{d}|c\frac{n}{d} \Rightarrow \frac{k}{d}|c$ par Gauss, donc $k\,a - k\,b = n\,\mu\left(\frac{k}{d}\right) = k\,\mu\left(\frac{n}{d}\right)$ alors on divise par k : $a - b = \mu\left(\frac{n}{d}\right)$ donc $x \equiv y\left[\frac{n}{d}\right]$:
     $\boxed{\text{Si } k|n = d, \text{ on peut diviser par } k \text{ à condition de diviser le } n, \text{ lui, par } d}$
     Exemple : $10 \times 4 \equiv 10 \times 7[15]$ alors : $4 \equiv 7[3]$.

3. EXOS DIVERS

3.0.1. Nombres de Fermat

On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$, montrer que si $n \neq p$ alors $F_n \wedge F_p = 1$.
Indication : exprimer F_{n+q} en fonction de F_n.
Réponse : $F_{n+q} = (F_n - 1)^{2^q} + 1 = k\,F_n + 2$ par Newton, donc $2|F_{n+q} \wedge F_n$, et vu que les F_n sont tous impairs, c'est gagné.

3.0.2. Nombres de Mersenne

1. On pose pour $n \geqslant 0$: $M_n = 2^n - 1$. Montrer que si $d|n$ alors $2^d - 1|M_n$, en déduire que M_n premier $\Rightarrow n$ premier, la réciproque est-elle vraie ?
   Si $n = d\,k$ alors $M_n = (2^d)^k - 1 = (2^d - 1)(1 + 2^d + \cdots + (2^d)^{k-1})$. La réciproque n'est pas vraie (M_{11} n'est pas premier).

2. On pose $a, n \geqslant 2$, montrer que $a^n - 1$ premier $\Rightarrow$ $a = 2$ et n premier.
   Évident car on a toujours $a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$.

3.0.3. Période des développements décimaux

Soit $x \in \mathbb{Q}$ avec $x = \dfrac{p}{q}$ et p, q premiers entre eux.

1. Montrer l'équivalence entre :
   a. x admet un développement décimal de période n ;
   b. $q | 10^n - 1$.
2. En déduire la période de développement décimal de $\dfrac{p}{7}$, où p est un entier premier avec 7.

Réponse : On a équivalence entre :

A) x admet un développement décimal (de période n) ;

B) $10^n \times x - x = x\,(10^n - 1)$ est un nombre entier (à n chiffres en comptant les éventuels 0) ;

C) $k\,q = p(10^n - 1)$ où $k \in \mathbb{N}$ (et possède n chiffres) ;

D) $q | 10^n - 1$.

Dans le sens $a \Rightarrow b$,
Posons $k =$, ainsi k est un entier (à n chiffres).
Donc et par Gauss on a $q | 10^n - 1$.
On trouve :

n	facteurs premiers de $10^n - 1$ autres que 3
1	–
2	**11**
3	**37**
4	11, **101**
5	**41, 271**
6	**7**, 11, **13**, 37

3.0.4. Entiers de Gauss

On pose $\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n \wedge b_n = 1$.
Cela reste-t-il vrai en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{n}$ avec $n \geqslant 3$?
Réponses possibles :

- Il suffit de remarquer que $\left(1 - \sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ et de multiplier pour obtenir :
  $$\pm 1 = (a_n)^2 - 2(b_n)^2,$$
  ce qui constitue une relation de Bezout $\alpha\,a_n + \beta\,b_n = \pm 1$ avec $\begin{cases} \alpha &= a_n \\ \beta &= -2\,b_n \end{cases}$.
- Une récurrence marche aussi.

Cela ne marche pas en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{n}$ par exemple.
Ainsi :

- cas particulier : $\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ donc ici $a_2 \wedge b_2 = 2$.
- cas général : $(1 + \sqrt{n})^3 = n + 1 + 3(n+1)\sqrt{n}$ donc ici $n + 1 | a_3 \wedge b_3$.

3.0.5. Écrire 999 comme différence de deux cubes

De quelles manières 999 peut-il s'écrire comme différence de deux cubes ?

Réponse : On résoud donc $a^3 - b^3 = 999$. Or on sait que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a\,b + b^2)$.
On écrit les diviseurs de 999 en remarquant que $999 = 3^3 \times 27$. On obtient ainsi l'ensemble
$$D = \{1; 3; 9; 27; 37; 111; 333; 999\}$$

Ainsi $d = a - b$ est un élément de D. Exprimons $e = a^2 + a\,b + b^2$ en fonction de d.

On a alors $d \times e = 999$ et :

$$\begin{aligned} e &= a^2 + a\,b + b^2 \\ &= (b+d)^2 + b(b+d) + b^2 \\ &= 3b^2 + 3b\,d + d^2. \end{aligned}$$

On cherche les solutions entières de l'équation en b suivante :

$$3b^2 + 3d \times b + (d^2 - e) = 0.$$

Il faut alors que $\Delta = 9d^2 - 4 \times 3(d^2 - e) = 12e - 3d^2$ soit un carré parfait.

On regarde donc, parmi tous les produits $d \times e = 999$, ceux tels que $12e - 3d^2$ soit un carré parfait.

Les seuls qui conviennent sont :
$(d = 3; e = 333)$ qui donne $\Delta = 63^2$ puis $b = 9$
$(d = 9; e = 111)$ qui donne $\Delta = 33^2$ puis $b = 1$
Conclusion : $\boxed{999 = 10^3 - 1 = 12^3 - 9^3}$

3.0.6. Divers

1. On suppose p et $8p^2 + 1$ premier. Montrer que $8p^2 - 1$ premier aussi.
   Réponse : on raisonne modulo 3 :
   - si $p = \pm 1[3]$ alors $8p^2 - 1 = 0[3]$ impossible sauf à avoir $8p^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow p^2 = 1/2$ impossible.
   - donc $p = 3$ et $8p^2 + 1 = 73$ et $8p^2 - 1 = 71$.
2. Soit un entier naturel n.
   a. Si n est premier avec tous les $k < n$, que dire de n ?
   b. Si $(n-1)! \equiv (-1)[n]$ que dire de n ?

4. Théorèmes

4.0.7. Montrer Gauss à partir de Bezout.

Réponse : si $\left\{\begin{array}{l} a|b\,c \\ a \wedge b = 1 \end{array}\right.$ alors $\exists k, m, n / \left\{\begin{array}{l} b\,c = a\,k \\ m\,a + n\,b = 1 (E_2) \end{array}\right.$, on multiplie E_2 par c et on obtient :

$$m\,a\,c + n\,a\,k = c$$

d'où $a|c$.

4.0.8. Fermat

Soit p premier.

1. Montrer que $\forall k \in \{1; \ldots; p-1\}$, $p \left| \binom{p}{k} \right.$.
2. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}$, $a^p \equiv a[p]$ par récurrence sur a.
3. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}$, on a : $[p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]]$.
4. Cas où p non premier
   a) Montrer que pour tout entier n, on a : $6|5n^3 + n$.
   b) Montrer que cela revient à affirmer que n^3 et n ont toujours la même congruence modulo 6. Le théorème de Fermat est donc parfois vrai pour des p non premiers. Vérifier pour $p = 4, 8, 9, 10, 12, 14, 15$.

Réponses :

1. Deux méthodes :

- $p! = \binom{p}{k} k!(n-k)!$ puis par Gauss $p | \binom{p}{k}$
- $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ et Gauss aussi.

2. $a=1$ ok. Hérédité : $(a+1)^p = \underbrace{a^p}_{a \text{ par hérédité}} + 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{p-1} \binom{p}{n} a^n}_{\text{multiple de } p \text{ d'après a.}} = a+1$ (modulo p).
3. On divise la congruence précédente par p.
4. a) On raisonne modulo 2 puis modulo 3 ou directement modulo 6.

4.0.9. Théorème de Wilson

Montrer que si $n \geqslant 2$, on a toujours :

$$(n-1)! = -1(n) \Rightarrow n \text{ premier.}$$

Réponse : on part de l'hypothèse :

$$\begin{aligned} \exists k / (n-1)! + kn = -1 &\Rightarrow n \wedge (n-1)! = 1 \\ &\Rightarrow n \text{ premier avec tous les } m \leqslant n-1 \\ &\Rightarrow n \text{ premier.} \end{aligned}$$

4.0.10. Un théorème d'Euclide sur les nombres parfaits

Si $2^{n+1}-1$ est premier, alors $2^n(2^{n+1}-1)$ est parfait.

Réponse : il suffit de lister ses diviseurs qui sont les $\{2^k\}$ et les $\{2^k \times (2^{n+1}-1)\}$ et d'en faire la somme. On trouve par ce procédé les nombres parfaits $6, 28, 16 \times 31, 64 \times 127$.

4.0.11. Il existe une infinité de premiers p de la forme $p = 4k+1$.

1. Soit $p \geqslant 3$ premier diviseur de n^2+1 où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $p \equiv 1[4]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que les diviseurs de $(n!)^2+1$ sont supérieurs à n.
3. Conclure.

Réponse :

1. $\exists k \in \mathbb{Z} / kp - n^2 = 1$ donc :
   - par Bezout $p \wedge n = 1$ donc par Fermat $n^{p-1} \equiv 1[p]$;
   - d'autre part $n^2 \equiv -1[p]$;
   - on a envie de mêler ces deux égalités, pour cela on élève la seconde à la puissance $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$. On obtient : $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ donc $\frac{p-1}{2}$ pair donc $p \equiv 1[4]$.
2. Si $(n!)^2+1 = \mu d$ alors, par Bezout, μ est premier avec $(n!)^2$ donc avec $n!$ donc $\mu > n$.
3. Conclusion : soit n aussi grand que l'on veut, soit μ un diviseur premier de $(n!)^2+1$ alors $\mu > n$ et $\mu \equiv 1[4]$.