Algèbre linéaire, exercices

EC0201SB03

Table des matières

1. Rappels de Cours

1.1. Résultats à connaître

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme associé. Soit Φ le polynôme caractéristique.

1. Si f possède $\boldsymbol{n}$ **vecteurs propres**, alors A est diagonalisable.
2. Si Φ possède $\boldsymbol{n}$ **valeurs propres** (éventuellement confondues) mais ne possède pas n vecteurs propres, alors A est semblable à une matrice de Jordan (on met autant de 1 qu'il manque de vecteurs propres)
3. Si Φ ne possède pas n valeurs propres, A n'est ni diagonalisable ni semblable à une Jordan.
   Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de rotation, $\Phi(X) = X^2 + 1$, pas de racine réelle.

1.2. Remarques

1. Lorsque Φ possède n valeurs propres, on dit que Φ est *scindé*.
2. Φ non scindé, cela signifie que Φ présente, quand on le factorise, des polynômes du second degré avec des discriminants négatifs. Exemples : $\Phi(X) = (X - 2)^3(X - 1)$ est scindé mais $\Phi(X) = X(X-1)(X^2+X+1)$ est non scindé.
3. [hors programme] si l'on se place sur $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$, tout polynôme est scindé.
4. Si $u_1, ..., u_n$ sont n vecteurs propres pour n valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ <u>distinctes</u>,
   alors $(u_1, ..., u_n)$ est une base.

1.3. Résumé

Si $\boldsymbol{\Phi}$ est scindé (i.e. s'il y a $\boldsymbol{n}$ valeurs propres, éventuellement confondues) alors :

- **soit $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable (s'il y a une base de $\boldsymbol{n}$ vecteurs propres) ;**
- **soit $\boldsymbol{A}$ semblable à une Jordan (s'il manque des vecteurs propres).**

Si $\boldsymbol{\Phi}$ n'est pas scindé (exemple $\boldsymbol{\Phi(X) = X^2 + 1}$) alors on ne peut rien faire.

1.4. Dimension 2

1. On pose $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique Φ est du second degré :
   - Si $\Delta>0$, il a deux racines (valeurs propres) distinctes et donc, chaque valeur propre ayant un vecteur propre, A est diagonalisable. Exemple : $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   - Si $\Delta<0$, il n'a pas de racine, donc il n'y a pas de valeur propre, le polynôme n'est pas scindé, et Jordan ne s'applique pas. Exemple : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Si $\Delta=0$, il y a une racine double : soit A est diagonalisable, soit Jordan s'applique.
     Exemples : $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ avec Jordan, ou $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonale.

1.5. Dimension 3

- Si $\Phi(X)$ possède trois racines, alors f possède forcément trois vecteurs propres, ils forment une base et f est diagonalisable.
  Exemple $M=\begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ 4 & 14 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$:
  valeurs propres $\mathrm{Sp}(f)=\{6,12,18\}$ et $M=P\Delta P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 12 & \\ & & 18 \end{pmatrix}$.
- Si $\Phi(X)$ a une seule racine simple alors on ne peut pas réduire ($\Phi(X)$ n'est pas *scindé*).
  Exemple $M=\begin{pmatrix} 3,8 & 10,4 & -2,6 \\ -4 & -4 & -2 \\ 0,4 & 5,2 & 9,2 \end{pmatrix}$:
  alors $\Phi(X)=(X-9)(X^2+36)$: ni diagonalisation, ni Jordan.
- Si $\Phi(X)$ a une seule racine triple, alors A n'est pas diagonalisable (sauf si elle est déjà diagonale). Mais on peut réduire en Jordan.
- Si $\Phi(X)$ a une racine double λ et une racine simple μ, alors tout dépend de la dimension de E_λ :
  - soit $\dim E_\lambda=2$ et dans ce cas A est diagonalisable semblable à $\Delta=\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$;
  - soit $\dim E_\lambda=1$ et dans ce cas A est semblable à $\Delta=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$.

2. Exercices matrices 2×2

Calculer A^3 de trois manières différentes, avec :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

Le polynome caractéristique est $\Phi_A(X)=X^2-3X+2$, de racines 1 et 2.
La trace est $\mathrm{tr}\, A=3$.

1. Par **Cayley-Hamilton** :
   on fait le quotient $X^3=\Phi_A(X)\,Q(X)+R(X)$ avec $R(X)=a\,X+b$.
   - En remplaçant X par 1 puis par 2, on trouve $R(X)=7X-6$.
   - En remplaçant X par A, on trouve $A^3=R(A)=7A-6I$.
2. Par **diagonalisation** : $A=P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (on vérifie $\mathrm{tr}\,\Delta=3$).
   On calcule $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
   On a alors $\Delta^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $A^3=P\,\Delta^3\,P^{-1}$.
3. **Directement** : on trouve $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$ puis A^3.
4. Les trois méthodes donnent :

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -21 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 de trois manières différentes, avec :

$$A=\begin{pmatrix} 3,4 & -2,7 \\ 1,8 & -2,9 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

Le polynome caractéristique est $\Phi_A(X) = X^2 - \frac{1}{2}X - 5$, de racines $\frac{5}{2}$ et -2.

La trace est $\operatorname{tr} A = 0,5$.

1. Par **Cayley-Hamilton** : On n'a pas besoin de faire le quotient ici : $\Phi_A(A) = 0$ donc on a directement $A^2 = \frac{1}{2}A + 5$.
2. **Diagonalisation** : $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (on vérifie $\operatorname{tr}\Delta = 0,5$).

   On calcule $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   On a alors $\Delta^2 = \begin{pmatrix} 6,25 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^2 = P\,\Delta^2\,P^{-1}$.
3. **Directement**, on calcule $A^2 = A \times A$.
4. Les trois méthodes donnent :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6,7 & -1,35 \\ 0,9 & 3,55 \end{pmatrix}.$$

Remarque : pour calculer A^n, la diagonalisation est incontournable.

Calculer A^{-1} de trois manières différentes en reprenant les deux exemples ci-dessus.

Calculer A^n de deux manières différentes, avec :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi_A(X) = X^2 + 8X + 16 = (X+4)^2$ de racine double -4.

La trace est $\operatorname{tr} A = -8$.

1. Par **Cayley-Hamilton** : $X^n = (X^2 + 8X + 16)\,Q(X) + R(X)$ avec $R(X) = a\,X + b$.

   En prenant $X = -4$ on a $(-4)^n = -4\,a + b$.

   Mais ici cela ne suffit pas : il faudrait une seconde racine. L'idée est alors de dériver.

   $3X^2 = (2X+8)\,Q(X) + (X^2 + 8X + 16)\,Q'(X) + R'(X)$ et on remplace X par -4 :

$$n \times (-4)^{n-1} = a.$$

   Ainsi, $b = (-4)^n + 4a = (-4)^{n-1} \times (4n - 4)$.

   Alors, $A^n = R(A) = n \times (-4)^{n-1}\,A + (-4)^{n-1} \times (4n-4)\,I$.
2. **Diagonalisation** : En résolvant $f(x) = -4x$, on trouve $2x + y = 0$ d'où un seul vecteur propre $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a alors $A \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, reste à trouver le vecteur $w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(w) = u - 4w$, ce qui donne le système $\begin{cases} -2x + y & = & 1 - 4x \\ -4x - 6y & = & -2 - 4y \end{cases}$ on trouve $w\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ (on vérifie $\operatorname{tr}\Delta = -8$).

   On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Reste alors à déterminer Δ^n. On écrit $\Delta = -4\,I + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Note : N est dite *nilpotente*.

   On applique le binome, valable car $N\,\Delta = \Delta\,N$: $\Delta^n = \binom{n}{0}N^0(-4I)^n + \binom{n}{1}N^1(-4I)^{n-1}$, les autres termes sont nuls. On a ainsi $\Delta^n = (-4)^{n-1} \times \begin{pmatrix} -4 & n \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.
3. **Directement** : ce serait impossible à moins de le programmer par ordinateur.
4. Les deux méthodes donnent :

$$A^n = (-4)^{n-1}\begin{pmatrix} 2n-4 & n \\ -4n & -2n-4 \end{pmatrix}.$$

3. Exercices matrices 3×3

Calculer A^n avec :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi_A(X)=X^3+12X^2+48X+64=(X+4)^3$ de racine triple -4.

La trace est $\operatorname{tr} A=-12$.

1. Par **Cayley-Hamilton** : $X^n=(X^3+12X^2+48X+64)\,Q(X)+R(X)$ avec $R(X)=a\,X^2+b\,X+c$.

   On prend $X=-4$ mais pareil : ça ne suffira pas, une seule équation, pour trouver trois coefficients. Donc on dérivera puis on prendra $X=-4$ et on redérivera et encore $X=-4$:

   - $(-4)^n=16a-4b+c$
   - $n\times(-4)^{n-1}=-8a+b$
   - $n(n-1)(-4)^{n-2}=2a$.

   On a aussitôt $R(X)=(-4)^{n-2}\times\left(\dfrac{n(n-1)}{2}X^2+(4n^2-8n)X+(8n^2-24n+16)\right)$.

   On prend $X=A$, alors $A^n=(-4)^{n-2}\times\left(\dfrac{n(n-1)}{2}A^2+(4n^2-8n)A+(8n^2-24n+16)I\right)$.

2. Par **Jordan** : E_{-4} est de dimension 1, on trouve le seul vecteur propre $u\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

   On cherche alors $\mathcal{B}=(u,v,w)$ tels que dans $\mathcal{B}$, A devienne $\Delta=\begin{pmatrix}-4&1&0\\0&-4&1\\0&0&-4\end{pmatrix}$ ($\operatorname{tr}\Delta=-12$).

   On résoud d'abord $f(v)=u-4v$, cela donne $\begin{cases}x-z=-1/2\\y=1/2\end{cases}$ d'où par exemple $v\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$.

   Puis on résoud $f(w)=v-4w$, cela donne $\begin{cases}x-z=1/4\\y=1/4\end{cases}$ d'où par exemple $w\begin{pmatrix}0\\1/4\\-1/4\end{pmatrix}$.

   Alors $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&1/4\\1&1/2&-1/4\end{pmatrix}$ et $A=P\,\Delta\,P^{-1}$.

   Il resterait alors à calculer P^{-1}, la méthode des cofacteurs serait la plus pertinente mais elle n'est pas au programme de ce chapitre, on trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&1\\2&2&-2\end{pmatrix}$.

   Puis $\Delta^n=(-4I+N)^n$ avec $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $N^2=N=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $N^3=0$ donc :

$$\Delta^n=(-4)^nI+(-4)^{n-1}n\,N+(-4)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}N^2,$$

   et enfin $A^n=P\,\Delta^nP^{-1}$.

Calculer A^{-1} de trois manières avec : $$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-4&12\\2&-7&12\\1&-2&3\end{pmatrix}.$$

On a $\Phi_A(X)=X^3+\dfrac{5}{3}X^2+\dfrac{1}{3}X-\dfrac{1}{3}=(X+1)^2\left(X-\dfrac{1}{3}\right)$ de racines -1 (double) et $\dfrac{1}{3}$ (simple).

La trace est $\operatorname{tr} A=-5/3$.

1. Par **Cayley-Hamilton** : $A^3+\dfrac{5}{3}A^2+\dfrac{1}{3}A-\dfrac{1}{3}I=0$ donc $A\left(A^2+\dfrac{5}{3}A+\dfrac{1}{3}I\right)=\dfrac{1}{3}I$,

   donc $A^{-1}=3A^2+5A+I$, avec $A^2=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}5&8&-24\\-4&17&-24\\-2&4&-3\end{pmatrix}$.

2. Par **Diagonalisation** :

   $E_{1/3}$ est de dimension 1, bien sûr. On trouve $u\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

   On trouve E_{-1} de dimension 2 car le système aboutit à $x-2y+6z=0$.

   On peut choisir par exemple $v\begin{pmatrix}0\\1\\1/3\end{pmatrix}$ et $w\begin{pmatrix}1\\0\\-1/6\end{pmatrix}$

   Finalement, $A=P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}2&0&1\\2&1&0\\1&1/3&-1/6\end{pmatrix}$ et $\Delta=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

   (on vérifie $\operatorname{tr}\Delta=-5/3$)

Évidemment, cette méthode est un peu bête ici car pour avoir A^{-1} il faut calculer P^{-1}...

Cependant on peut remarquer que le calcul de P^{-1} avec les cofacteurs est assez simple car la matrice P comporte deux 0...

Pour info, $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 8 & -12 \\ 2 & 4 & -12 \end{pmatrix}$.

Enfin... $A^{-1} = P\,\Delta^{-1}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

3. Par la matrice des cofacteurs.
4. Par toutes les méthodes, on trouve :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 \\ 2 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la réduction de Jordan de A avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -8/3 & -16/3 \\ -1/4 & -13/6 & -7/3 \\ 1/8 & 5/4 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi_A(X) = X^3 + \frac{5}{3}X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} = (X+1)^2\left(X - \frac{1}{3}\right)$ de racines -1 (double) et $\frac{1}{3}$ (simple).

La trace est $\operatorname{tr} A = -5/3$.

C'est intéressant car la matrice a le même polynôme caractéristique que la précédente et pourtant la précédente était diagonalisable et celle-ci n'est réductible que par Jordan comme on va le voir. Au fait, celle matrice a la même trace que la précédente, mais ça c'est logique vu qu'elles ont le même polynôme caractéristique. Voyez-vous pourquoi ? Réponse : la trace c'est le coefficient de X^2 (ou son opposé suivant comment on calcule $\Phi_A(X)$).

Le polynôme caractéristique a trois racines (en comptant les multiplicités) donc si ce n'est pas diago ce sera réductible en Jordan. *On dit qu'il est scindé.*

$E_{1/3}$ est de dimension 1, bien sûr. On trouve $u\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On trouve E_{-1} de dimension 1 car le système aboutit à $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases}$ donc par exemple $v\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche alors w tel que, dans $\mathcal{B} = (u, v, w)$, A devienne $\Delta = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ($\operatorname{tr}\Delta = -5/3$).

On résoud $f(w) = v - w$, cela donne $\begin{cases} x = 8 \\ y = -2z \end{cases}$ d'où par exemple $w\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $P = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = P\,\Delta\,P^{-1}$.

Déterminer la réduction de Jordan de A avec :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi_A(X) = (X+6)^3$ (scindé) de racine -6 (triple) :

A sera donc soit diagonalisable soit jordanisable.

Diagonalisable est impossible sinon on aurait $A = P \times (-6I) \times P^{-1} = -6PP^{-1} = -6I$, ce qui visiblement n'est pas le cas.

La trace est $\operatorname{tr} A = -18$.

Le système pour trouver les vecteurs propres associés à $\lambda = -6$ se ramène à $-2x + 2y = z$, donc E_{-6} est de dimension 2 et ses vecteurs ont pour expression $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y - 2x \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On ne va pas, ici prendre au hasard (x, y) égal à $(0,1)$ puis à $(1,0)$ comme habituellement.

Reste à trouver une base (u, v) de E_{-6} et un w tel que $f(w) = v - 6w(1)$, ce qui veut dire une base (u, v, w) dans laquelle f ait pour matrice $\Delta = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & -6 & 1 \\ & & -6 \end{pmatrix}$.

Si $w\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors l'équation (1) aboutit à $\left\{\begin{array}{lcl} -8x+2y-z & = & v_x-6x \\ -2x-4y-z & = & v_y-6y \\ -6z & = & v_z-6z. \end{array}\right.$

On voit que la dernière ligne donne $0=v_z$ et donc il convient de bien choisir v de manière à ce que sa dernière coordonnée v_z soit nulle. Vu que u comme v ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y-2x \end{pmatrix}$ avec x, y à choisir librement, on peut par exemple prendre $v=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour u ce que l'on veut, style $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Le système (1) donne alors $\left\{\begin{array}{lcl} -8x+2y-z & = & 1-6x \\ -2x-4y-z & = & 1-6y \\ -6z & = & -6z. \end{array}\right. \Leftrightarrow -2x+2y-z=1$ et l'on a l'embarras du choix, par exemple $w=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Conclusion, : $A=P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\Delta=\begin{pmatrix} -6 & & \\ & -6 & 1 \\ & & -6 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $\operatorname{tr}\Delta=-6-6-6=-18$.

Déterminer la réduction de Jordan de A avec :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi(X)=(X-2)^3$ et $E_2=\operatorname{vect}\left\{u=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Il manque un vecteur. Avec un peu de chance on va trouver w directement. Posons $w\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On voudrait $f(w)=v+2w$, ce qui donne le système suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 2x \\ -4x+4y & = & 2y \\ -2x+y+2z & = & 1+2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y-2x=0 \\ y-2x=1 \end{array}\right.$ ça ne marche pas...

Essayons d'intervertir u et v, on a alors la base (v,u,w) et l'on veut $f(w)=u+2w$ ce qui donne le système $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 1+2x \\ -4x+4y & = & 2+2y \\ -2x+y+2z & = & 2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y-2x=1 \\ y-2x=0 \end{array}\right.$, qui ne marche toujours pas.

Alors on prend $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ b \end{pmatrix}$ la combinaison linéaire $a\times\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+b\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On veut $f(w)=v+2w$ ce qui donne cette fois-ci :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & a+2x \\ -4x+4y & = & 2a+2y \\ -2x+y+2z & = & b+2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y-2x & = & a \\ y-2x & = & a \\ y-2x & = & b \end{array}\right.$$

Il suffisait donc de prendre $a=b$ soit par exemple $v=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, correspondant à $a=b=1$.

On a alors le choix pour w, par exemple $w=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion, : $A=P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Réduire si possible la matrice A avec :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi(X)=X^3+2X^2+X+2=(X+2)(X^2+1)$, non scindé donc pas de réduction : ni diagonalisation, ni Jordan.

Remarque : si l'on se plaçait dans $\mathbb{C}$, on pourrait diagonaliser la matrice en $\begin{pmatrix} -2 & & \\ & \mathrm{i} & \\ & & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ mais ceci est en dehors du programme de cet UE.

4. Exercices matrices 4×4

On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^{-1} directement, en posant un système à seize inconnues.
2. Trouver valeurs propres et vecteurs propres de A et de B.
3. Existe-t-il des valeurs de λ et μ telles que $A\,B=B\,A$?

1. On pose $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\\ m & n & o & p\end{pmatrix}$ et on écrit que $A^{-1}\times A=I$ on a immédiatement, via le peigne :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & b & -\frac{\mu}{\lambda} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 0\\ 0 & 0 & o & 1\end{pmatrix}.$$

2. On trouve :

- pour A : $u_\lambda=\begin{pmatrix} \mu\\ 0\\ \lambda-1\\ 0\end{pmatrix}$ et $E_1=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
- pour B : $u_6=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\3\end{pmatrix}, u_{-1}=\begin{pmatrix}6\\-1\\-8\\-5\end{pmatrix}, u_0=\begin{pmatrix}1\\1\\-5\\0\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

3. $B\,A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & \lambda+\mu & 0\\ 2 & 3 & \lambda+2\mu & 0\\ 3 & 2 & \lambda+3\mu & 0\\ 4 & 1 & \lambda+4\mu & 2\end{pmatrix}$ et $A\,B=\begin{pmatrix} 3\mu+1 & 2\mu+4 & \mu+1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 3\lambda & 2\lambda & \lambda & 0\\ 4 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ donc $A\,B=B\,A\Leftrightarrow(\mu=0;\lambda=1)$.

Réduire si possible la matrice A avec :

$$A=\begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & -1\\ 6 & 3 & 2 & -1\\ 26 & 7 & 10 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

On a $\Phi(X)=(X-1)(X-2)^3$, on trouve $u_1=(2,-1,-5,0)$ et $u_2=(3,-2,-8,0)$, ce sera un Jordan. On cherche $\Delta=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1\\ & & & 2\end{pmatrix}$ donc w tel que $f(w)=u_2+2w$ on trouve un système qui nous demande de choisir, on peut par exemple prendre $w=(3,-2,-7,0)$ puis on cherche w' tel que $f(w')=w+2w'$, et alors on arrive à un système qui aboutit bien.

5. Applications

5.1. Systèmes de suites récurrentes

Déterminer le terme général de (x_n,y_n,z_n) sachant que :

$$\begin{cases} x_{n+1} &=& 5x_n-17y_n+25z_n\\ y_{n+1} &=& 2x_n-9y_n+16z_n\\ z_{n+1} &=& x_n-5y_n+9z_n\end{cases}.$$

Posons $A=\begin{pmatrix} 5 & -17 & 25\\ 2 & -9 & 16\\ 1 & -5 & 9\end{pmatrix}$ et $X_n=\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\\ z_n\end{pmatrix}$ alors le système s'écrit $X_{n+1}=A\,X_n$ soit $X_n=A^n\,X_0$.

On a $\Phi(X)=X^3-5X^2+8X-4=(X-1)(X-2)^2$, on divise X^n par $\Phi(X)$ on obtient :

$$X^n=\Phi(X)+a\,X^2+b\,X+c,$$

le principeé tant que le reste est toujours de degré (ici 2) strictement inférieur au polynôme par lequel on divise (ici $\Phi(X)$, de degré 3).

On remplace X par les racines de $\Phi(X)$ soit 1 et 2 mais cela ne suffira pas, on n'a pas de troisième racine puisque 2 est racine double.

Alors on utilise le principe : « x_0 racine double de $P \Rightarrow P(x_0) = P'(x_0) = 0$ ».

Donc on dérivera et on remplacera X par 2. Voici le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a+b+c \\ 2^n & = & 4a+2b+c \\ n\times 2^{n-1} & = & 4a+b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 2^{n-1}(n-2)+1 \\ b & = & 2^{n-1}(8-3n)-4 \\ c & = & 2^{n-1}(2n-6)+4 \end{array}\right. .$$

On vérifie pour $n=3$.

À partir de là, vu que $\Phi(A)=0$ on a alors $\boxed{A^n = a\,A^2 + b\,A + c\,I}$.

Vu que $A^2 = \begin{pmatrix} 16 & -57 & 78 \\ 8 & -33 & 50 \\ 4 & -17 & 26 \end{pmatrix}$, on a $A^n = \begin{pmatrix} 16a+5b+c & -57a-17b & 78a+25b \\ 8a+2b & -33a-9b+c & 50a+16b \\ 4a+b & -17a-5b & 26a+9b+c \end{pmatrix}$ soit :

$$A^n = \begin{pmatrix} (2+3n)2^{n-1} & \dots & \dots \\ -2n\,2^{n-1} & \dots & \dots \\ -n\,2^{n-1} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

etc.. *finir* de *simplifier...*

Ainsi :

$$X_n = \begin{pmatrix} (2+3n)2^{n-1}x_0 - (57a+17b)y_0 + (78a+25b)z_0 \\ -2n\,2^{n-1}x_0 - (33a+9b-c)y_0 + (50a+16b)z_0 \\ -n\,2^{n-1}x_0 - (17a+5b)y_0 + (26a+9b+c)z_0 \end{pmatrix},$$

ce qui est un peu long à écrire si l'on doit remplacer a, b, c par leur expression en fonction de n...

On pouvait aussi utiliser Jordan : on a $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule P^{-1} par Cayey Hamilton : $\Phi_P(X) = X^3 - 13X^2 - 2X - 1$ donc $P^{-1} = (P^2 - 13P - 2I)$ et l'on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite il faut calculer $\Delta^n = \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}\right)^n$, on applique le binôme :

$$\begin{array}{rcl} \Delta^n & = & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^n + n\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \times \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^n & \\ & & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ & & n\times 2^{n-1} \\ & & \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^{n-1}(2+n) & \\ & & 2^n \end{pmatrix} \end{array}$$

Puis on a $A^n = P \times \Delta^n \times P^{-1}$, exercice intéressant pour s'entraîner en calculs, on doit retrouver la même chose que par Cayley Hamilton...

5.2. Systèmes différentiels

Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 10x + 8y - 3z \\ y' & = & 4x + 14y - 3z \\ z' & = & 12z \end{array}\right. .$$

On étudie $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ 4 & 14 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, on a $\Phi_A(X) = (X-6)(X-12)(X-18)$ puis $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 12 & \\ & & 18 \end{pmatrix}$ et $A = P\,\Delta\,P^{-1}$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$, le système s'écrit alors $X' = A\,X \Leftrightarrow X' = P\,\Delta\,P^{-1}X$ ce qui équivaut, en multipliant par P^{-1} par la gauche de chaque côté :

$$Y' = \Delta Y.$$

Si $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ on a alors $\begin{cases} x_1' = 6x_1 \\ y_1' = 12y_1 \\ z_1' = 18z_1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_1 = \lambda\,\mathrm{e}^{6t} \\ y_1 = \mu \mathrm{e}^{12t} \\ z_1 = \gamma \mathrm{e}18t \end{cases}$ puis on remarque que $X = PY$ d'où :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \mathrm{e}^{6t} + \mu \mathrm{e}^{12t} + \gamma \mathrm{e}^{18t} \\ y = -\lambda \mathrm{e}^{6t} + \mu \mathrm{e}^{12t} + \gamma \mathrm{e}^{18t} \\ z = 2\mu \mathrm{e}^{12t} \end{cases}.$$

Il peut arriver que A soit réductible en Jordan, auquel cas le calcul part sur le même principe, un peu plus long à partir de $Y' = \Delta\,Y$.

```
Python 2.7.10 (default, Jul 14 2015, 19:46:27)
[GCC 4.2.1 Compatible Apple LLVM 6.0 (clang-600.0.39)]
Python plugin for TeXmacs.
Please see the documentation in Help -> Plugins -> Python

>>> 1+2
  3
>>> a=2;a**2
>>> print(a**2)
  4
>>> print(a**a**a)
  16
>>> 3.4*2.9
  9.86
>>> -9.86-2.7*(-1.8)
  -5.0
>>> 2.7*1.8
  4.86
>>> 4.86/9.86
  0.492900608519
>>> sqrt(4.86/9.86)
  0.702068806115
>>> from math import *
>>> 6.3**2
  39.69
>>> 4*9.86
  39.44
>>> 39.69+39.44
  79.13
>>> sqrt(79.13)
```

```
  8.8955044826
>>> sqrt(6.3**2+20)
  7.72593036469
>>> sqrt(39.69+20)
  7.72593036469
>>> sqrt(20.25)
  4.5
>>>
```