Matrices orthogonales

Table des matières

1. Rappels de cours

Soit A une matrice associée à un endormorphisme f de $\mathbb{R}^n$.

- A orthogonale <u>ssi</u> ses vecteurs colonnes (ou lignes) forment une base orthonormée, ce qui s'écrit aussi ${}^tA = A^{-1}$.
- Si A orthogonale, alors $\det A = \pm 1$.
- Si $\det A = 1$ c'est un *déplacement*. Dans $\mathbb{R}^3$, ce sont les rotations autour d'un axe. Si $\theta = \pi$ on les appelle **retournements**.
- Si $\det A = -1$, c'est un *anti-déplacement*. Dans $\mathbb{R}^3$, ce sont les anti-rotations, composition d'une **réflexion** de plan P et d'une rotation d'axe u normal à P.

Les endormorphismes dont les matrices sont orthogonales sont appelés *endomorphisme orthogonaux* ou *isométries*.

2. Exercices divers

1. Si l'on appelle c_1, c_2, c_3 les trois vecteurs-colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale, a-t-on automatiquement $c_1 \wedge c_2 = c_3$?

   Réponse : on a automatiquement $c_1 \wedge c_2 = \pm c_3$, le signe $+$ ou $-$ donnant le signe du déterminant $+1$ ou -1.

3. Matrices orthogonales et isométries, $n = 2$

3.1. Rotations

C'est très simple, la matrice d'une rotation d'angle θ s'écrit $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Il n'y a aucun changement de base à effectuer.

Le terme en haut à droite de la matrice donne le signe de θ.

Étudier $A=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ -0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$.

Orthogonale et de déterminant $+1$ donc **rotation**.
On a $0,6=\cos\theta$.
De plus, le terme en haut à droite est positif donc donc $\theta=+\arccos(0,6)\approx+53°$.

Étudier $A=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{12} & -\sqrt{13} \\ \sqrt{13} & \sqrt{12} \end{pmatrix}$.

Orthogonale et de déterminant $+1$ donc **rotation**.
On a $\sqrt{12}/5=\cos\theta$.
De plus, le terme en haut à droite est négatif donc donc $\theta=-\arccos\left(\sqrt{12}/5\right)\approx-46°$.

Matrice de la rotation d'angle $\theta=5\pi/6$.

On écrit simplement $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

3.2. Symétries axiales

La matrice d'une symétrie axiale s'écrit $R=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Il faut juste identifier θ.
Il n'y a aucun changement de base à effectuer non plus.
L'axe de la symétrie est donné par le vecteur $u\left(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

Étudier $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Orthogonale et de déterminant -1 donc **symétrie axiale**.
On a $1=\sin\theta$ donc $\theta=\frac{\pi}{2}$.
L'axe de la symétrie est donc $u\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$, pour simplifier on peut dire $(1,1)$.

Étudier $A=\begin{pmatrix} -0,6 & -0,8 \\ -0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$.

Orthogonale et de déterminant -1 donc **symétrie axiale**.
On a $-0,6=\cos\theta$ donc $\theta=\pm\arccos(-0,6)\approx\pm127°$.
On a $\sin\theta=-0,8$ donc on prendra $\theta=-\arccos(-0,6)$.
L'axe de la symétrie est donc $u\left(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2}\right)\approx(0,82\,;\,0,57)$.

3.3. Cas particuliers

Pour $\theta=0$ on a la rotation $R=I$, c'est l'identité.
Pour $\theta=\pi$ on a la rotation $R=-I$, c'est la symétrie de centre O.
Au niveau des symétries, pour $\theta=0$ on a $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d'axe $(1,0)$.
Et pour $\theta=\pi$ on a $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'axe $(0,1)$.

4. MATRICES ORTHOGONALES ET ISOMÉTRIES, $n=3$

4.1. Protocole d'étude d'une matrice orthogonale 3×3

- Cas particuliers :
  - si $A=I$ on arrête là : matrice identité ;
  - si $A=-I$ on arrête là : **symétrie centrale** ;
  - si A est symétrique (et orthogonale donc) : c'est soit un **retournement** soit une **réflexion**, il faut alors déterminer E_1 et E_{-1} « à la main » :
    - si $\dim E_1=1$ alors $\dim E_{-1}=2$ et c'est un retournement d'axe u_1 ;
    - si $\dim E_1=2$ alors $\dim E_{-1}=1$ et c'est une réflexion de plan E_1 ;

- on trouve l'**axe** de l'(anti-)rotation, c'est $\vec{u}(a,b,c)$ avec $(A-{}^tA)=\begin{pmatrix} * & \boldsymbol{c} & * \\ * & * & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} & * & * \end{pmatrix}$;
- on calcule $A(\vec{u})$:
  - si $A(\vec{u})=\vec{u}$, alors A représente alors une **rotation** ;
  - si $A(\vec{u})=-\vec{u}$, alors A représente une **anti-rotation** ;
- on cherche l'**angle** (on choisit $\theta>0$) :
  - si c'est une rotation, son angle est donné par $2\cos\theta+1=\operatorname{tr}A$;
  - si c'est une anti-rotation, son angle est donné par $2\cos\theta-1=\operatorname{tr}A$;
- On peut écrire $A=PRP^{-1}$ avec :
  - $P=\begin{pmatrix} u_x & * & * \\ u_y & * & * \\ u_z & * & * \end{pmatrix}$, où l'on complète en trouvant n'importe quelle base orthonormée commençant par u ;
  - $R=\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $+1$ si c'est une rotation et -1 si c'est une anti-rotation.

4.2. Études de matrices

Étudier $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Orthogonale.
Pour l'axe on calcule $A-{}^tA=\begin{pmatrix} * & 1 & * \\ * & * & 3 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}$, d'où $\vec{u}=(3;1;1)$.
On calcule $A\vec{u}=(3;1;1)$ donc $\det A=+1$: **rotation**.
Pour l'**angle** de la rotation, on utilise la trace :
$2\cos\theta+1=\operatorname{tr}A=-2/3$ donc $\cos\theta=-5/6$ donc $\theta=\arccos(-5/6)\approx146°$.

Conclusion : rotation d'axe $u=(3;1;1)$ et d'angle $\approx 146°$ (presque $5\pi/6$).
Bien entendu, on pourrait aussi dire : rotation d'axe $(-3;-1;-1)$ et d'angle $\approx -146°$.

Pour le changement de base, on cherche une base orthonormée $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}u,\, v,\, w\right)$, on prend par exemple $v=(0,1,-1)$ et puis $w=u\wedge v$ et on les normalise, on a alors $A=PRP^{-1}$ avec $P=(u,v,w)$ et $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & \sqrt{11}/6 \\ 0 & -\sqrt{11}/6 & -5/6 \end{pmatrix}$.

Étudier $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

Orthogonale et de déterminant $+1$ donc **rotation**.
Pour l'**angle** de la rotation, on utilise la trace :
$2\cos\theta+1=\operatorname{tr}A=2$ d'où $\cos\theta=\frac{1}{2}$ donc $\theta=\pi/3$.
Pour l'axe on calcule $A-{}^tA=\begin{pmatrix} * & \mathbf{0} & * \\ * & * & \boldsymbol{-2\sqrt{6}} \\ \boldsymbol{-2\sqrt{6}} & * & * \end{pmatrix}$, d'où $\vec{u}=(-1;-1;0)$ (en simplifiant par $2\sqrt{6}$).
C'est donc une rotation d'axe $u=(-1;-1;0)$ et d'angle $\pi/3$.
Ou bien : rotation d'axe $(1;1;0)$ et d'angle $-\pi/3$.
Pour le changement de base, on cherche une base orthonormée $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u,\, v,\, w\right)$, on prend par exemple $v=(1,-1,0)$ et puis $w=u\wedge v$ et on les normalise, on a alors $A=PRP^{-1}$ avec $P=(u,v,w)$ et $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Étudier $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

Orthogonale et de déterminant -1 donc **anti-rotation**.
Pour l'**angle** de la rotation, on utilise la trace :
$2\cos\theta - 1 = \operatorname{tr} B = 7/9$ d'où $\cos\theta = \frac{8}{9}$ donc $\theta \approx 152°$.
Pour l'**axe** on calcule $A - {}^tA = \begin{pmatrix} * & \mathbf{8} & * \\ * & * & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & * & * \end{pmatrix}$, d'où $\vec{u} = (-1;0;4)$ (en simplifiant par 2).
C'est donc une anti-rotation d'axe $(-1;0;4)$ et d'angle $\arccos(8/9)$.

Pour le changement de base, on cherche une base orthonormée $\left(\frac{1}{\sqrt{17}}u,\ v,\ w\right)$, on prend par exemple $v=(4,0,1)$ et puis $w=u\wedge v$ et on les normalise, on a alors $A=PRP^{-1}$ avec $P=(u,v,w)$ et $R=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/9 & \sqrt{17}/9 \\ 0 & -\sqrt{17}/9 & 8/9 \end{pmatrix}$

Étudier $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$.

Orthogonale et de déterminant -1 donc **anti-rotation**.
Pour l'**angle** de la rotation, on utilise la trace :
$2\cos\theta - 1 = \operatorname{tr} A = 1$ d'où $\theta = 0$: anti-rotation d'angle 0 = réflexion.
Pour l'**axe** on doit chercher à la main le veteur propre associé à $\lambda=-1$.
On trouve $u_{-1} = \left(1;-1;-\sqrt{6}\right)$.
C'est donc une réflexion dont le plan a pour vecteur normal $\left(1;-1;-\sqrt{6}\right)$.

Pour le changement de base, on cherche une base orthonormée $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}u,\ v,\ w\right)$, on prend par exemple $v=(1,1,0)$ et puis $w=u\wedge v$ et on les normalise, on a alors $A=PRP^{-1}$ avec $P=(u,v,w)$ et $R=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Étudier $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

Orthogonale et de déterminant 1 donc **rotation**.
Comme A est symétrique on est dans le cas particulier $\theta=\pi$: **retournement**.
On peut le vérifier avec la trace : $2\cos\theta + 1 = \operatorname{tr} A = -1$ donc $\theta = \pi$.
Pour l'axe on cherche à la main u_1, on trouve $u_1 = (1;4;1)$.
C'est donc un retournement autour de l'axe $(1;4;1)$.

Pour le changement de base, on cherche une base orthonormée $\left(\frac{1}{\sqrt{18}}u,\ v,\ w\right)$, on prend par exemple $v=(1,0,-0)$ et puis $w=u\wedge v$ et on les normalise, on a alors $A=PRP^{-1}$ avec $P=(u,v,w)$ et $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Étudier $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

Orthogonale et de déterminant 1 donc **rotation**.
Pour l'**angle** de la rotation, on a $2\cos\theta + 1 = 1$ donc $\cos\theta = 0$ donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Pour l'axe on calcule $A - {}^tA = \begin{pmatrix} * & \mathbf{-2\sqrt{2}} & * \\ * & * & \mathbf{-2\sqrt{2}} \\ \mathbf{0} & * & * \end{pmatrix}$, d'où $\vec{u} = (-1;0;-1)$ (en simplifiant par $2\sqrt{2}$).
C'est donc une rotation d'axe $(-1;0;-1)$ et d'angle $\pi/2$.

Pour le changement de base, on cherche une base orthonormée $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u,\ v,\ w\right)$, on prend par exemple $v=(0,1,0)$ et puis $w=u\wedge v$ et on les normalise, on a alors $A=PRP^{-1}$ avec $P=(u,v,w)$ et $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3. Protocole pour déterminer la matrice

4.3.1. Rotations, méthode 1

Donner la matrice de la rotation d'axe $u=(a,b,c)$ et d'angle θ donnés.

- on écrit $P=\begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix}$ en complétant la colonne 2 par un vecteur inventé et orhogonal à (a,b,c) et la colonne 3 par le produit vectoriel des deux premières colonnes ;
- on normalise les vecteurs colonnes de P ;
- on écrit $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;
- on donne $A=PRP^{-1}$.

4.3.2. Rotations, méthode 2

On pose la matrice $K=\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. On calcule K^2, alors la formule de Rodriguez donne directement la matrice de la rotation :

$$A=I+\sin\theta\,K+(1-\cos\theta)\,K^2.$$

4.3.3. Anti-rotatio:ns

Même méthode 1 sauf qu'on remplace R par $R=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

4.4. Détermination de matrices

Matrice de la rotation d'axe $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta=\pi/2$.

Méthode 1 :

On prend $u=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et on choisit deux vecteurs v,w tels que (u,v,w) forme un trièdre direct : $v=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ par exemple puis $w=u\wedge v=\begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$. On normalise en prenant $\left(\frac{1}{5}u,\frac{1}{5}v,\frac{1}{25}w\right)$.

On pose $P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $A=PRP^{-1}$.

Méthode 2 :

$K=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, puis $K^2=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -16 & 0 & 12 \\ 0 & -25 & 0 \\ 12 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Alors $A=I+K+K^2$.

Les deux méthodes donnent :

$$A=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -20 & 12 \\ 20 & 0 & -15 \\ 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Matrice du retournement d'axe $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que, dans $\mathbb{R}^3$, un *retournement* est une rotation d'angle π.

Méthode 1 :

On prend $u=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on choisit deux vecteurs v,w tels que (u,v,w) forme un trièdre direct : $v=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple puis $w=u\wedge v=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On normalise en prenant $P=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u,v,\frac{1}{\sqrt{2}}w\right)$.

On pose $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a alors $A=PRP^{-1}$.

Méthode 2 :

$K=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $K^2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Alors $A=I+2K^2$.
Les deux méthodes donnent :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrice de l'anti-rotation d'axe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta=\pi/2$.

Méthode 1 :
On prend $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on choisit deux vecteurs v, w tels que (u, v, w) forme un trièdre direct : $v=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple puis $w=u\wedge v=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
On normalise en prenant $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}u, \dfrac{1}{\sqrt{2}}v, \dfrac{1}{\sqrt{6}}w\right)$.
On pose $R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $A=PRP^{-1}$.
Méthode 2 :
$K=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $K^2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Alors $A=I+K+K^2$.
Les deux méthodes donnent :

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice de la réflexion par rapport au plan $x+y+2z=1$

Méthode 1 :
On prend $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on choisit deux vecteurs v, w tels que (u, v, w) forme un trièdre direct : $v=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple, puis $u\wedge v$ qu'on simplifie : $w=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On normalise en prenant $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}u, \dfrac{1}{\sqrt{2}}v, \dfrac{1}{\sqrt{3}}w\right)$.
On pose $R=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $A=PRP^{-1}$.

4.5. Exercices divers

1. On pose $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a, b sont deux réels.
   À quelle condition sur a, b a-t-on A orthogonale ?
   Donner alors les éléments caractéristiques de A.
   On trouve $\begin{cases} a^2+2b^2=1 \\ 2ab+b^2=0 \end{cases}$ d'où $(a, b)\in\left\{(\pm 1; 0), \pm\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)\right\}$
   - $(a, b)=(1, 0)$: $f=I_3$.
   - $(a, b)=(-1, 0)$: $f=-I_3$.
   - $(a, b)=\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$: réflexion par rapport au plan $x+y+z=0$.
   - $(a, b)=\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$: retournement par rapport à la droite vect$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit A_y la matrice de la rotation d'angle θ_y portée par le vecteur $(0, 1, 0)$.

Soit A_x la matrice de la rotation d'angle θ_y portée par le vecteur $(1,0,0)$.

a) À quelle condition sur θ_x, θ_y la matrice $A_x\,A_y$ transforme-t-elle $(0,0,1)$ en (x,y,z) donné ?

b) Établir la matrice R de rotation transformant $(0,0,1)$ en (x,y,z).

c) A-t-on $R = A_x\,A_y$?

On posera $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *et* $R = \sqrt{x^2+y^2}$.

Réponse : $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}$ et $A_y = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}$.

On trouve alors $A_x\,A_y = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\cos\theta_y \\ -\cos\theta_x\sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x\cos\theta_y \end{pmatrix}$.

a) On a donc $\begin{cases} \sin\theta_y = \frac{x}{\rho} \\ \sin\theta_x = -\frac{y}{R} \\ \cos\theta_x = \frac{z}{R} \end{cases}$ puis $A_x\,A_y = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} R & 0 & x \\ -x\,y/R & z\,\rho/R & y \\ -x\,z/R & -y\,\rho/R & z \end{pmatrix}$.

b) $\sin\theta = \dfrac{R}{\rho}$ et $\cos\theta = \dfrac{z}{\rho}$ et $\vec{n}(-y,x,0)$ puis :

$$R = \begin{pmatrix} \dfrac{y^2+x^2\cos\theta}{R^2} & -(1-\cos\theta)\dfrac{x\,y}{R^2} & \dfrac{x\sin\theta}{R} \\ (1-\cos\theta)\dfrac{x\,y}{R^2} & \dfrac{x^2+y^2\cos\theta}{R^2} & \dfrac{y\sin\theta}{R} \\ -\dfrac{x\sin\theta}{R} & -\dfrac{y\sin\theta}{R} & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y^2+x^2\,z/\rho}{R^2} & -\left(1-\dfrac{z}{\rho}\right)\dfrac{x\,y}{R^2} & \dfrac{x}{\rho} \\ \left(1-\dfrac{z}{\rho}\right)\dfrac{x\,y}{R^2} & \dfrac{x^2+y^2\,z/\rho}{R^2} & \dfrac{y}{\rho} \\ -\dfrac{x}{\rho} & -\dfrac{y}{\rho} & \dfrac{z}{\rho} \end{pmatrix}$$

c) On trouve $A_x\,A_y$ rotation :

- d'axe $\vec{u}\begin{pmatrix} y(R+\rho) \\ -x(R+z) \\ x\,y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$;
- d'angle $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\rho} + \frac{z}{R} + \frac{z}{\rho} - 1\right) \neq \frac{z}{\rho}$.