Matrices

Table des matières

1. Matrice à la puissance n

1.1. Procédé $I+N$

1. On donne $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En écrivant $A=2I+N$ donner une formule pour A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.2. Cas où un calcul simple (exemple : A^2) permet d'avoir A^n

1. *Utilise la division euclidienne dans* $\mathbb{R}[X]$.

   On pose $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^2-3A. En déduire A^n.

Réponse : $A^2-3A=-2I$. On divise $X^n=(X^2-3X+2)\,Q(X)+a\,X+b$, on trouve :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2^n-1 \\ b=2-2^n. \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{A^n=(2^n-1)A+(2-2^n)I}$.

2. *Généralisation du précédent*

   On pose $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer $A^2-(a+d)\,A$. En déduire A^n.

   Réponse : $A^2-(a+d)\,A=-\det A\cdot I$. Si maintenant x, y sont les solutions de $X^2-(a+d)X+\det A=0$, alors :

$$A^n=\frac{x^n-y^n}{x-y}\,A+\frac{x\,y^n-y\,x^n}{x-y}.$$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, calculer A^n.

   Réponse : $A^2=9\,I$ donc :

$$A^n=\begin{cases} 9^p\,I & \text{si} \quad n=2p \\ 9^p\,A & \text{si} \quad n=2p+1. \end{cases}$$

4. Calculer A^n avec $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Réponse : $A^2=I$ donc :

$$A^n=\begin{cases} I & \text{si} \quad n=2p \\ A & \text{si} \quad n=2p+1. \end{cases}$$

1.3. Divers

1. On pose $\varphi(x,y)=(2x-6y,-2x+y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Par un certain calcul déterminer l'expression de $\varphi^{(n)}(x,y)$ (c'est-à-dire φ appliquée n fois de suite à (x,y)).

2. $A=\begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix}$ avec $a\,d=b\,c$. Calculer A^n.

   Réponse : $A=I+B$ avec $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On remarque que $B^2=(a+d)\,B$ et par récurrence on a donc pour $k\geqslant 1$: $B^k=(a+d)^{k-1}\,B$.

   Ainsi :

$$A^n=I+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(a+d)^{k-1}B,$$

   et on en déduit facilement :

   - Si $a+d=0$ alors $A^n=I+n\,B=\begin{pmatrix} 1+n\,a & b \\ c & 1+n\,d \end{pmatrix}$.
   - Si $a+d\neq 0$ alors $A^n=\dfrac{1}{a+d}((1+a+d)^n-1)\,B$.

3. On pose $A(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, trouver une idée pour exprimer $A(x)^n$.

   Réponse : remarquer que $A(x+y)=A(x)\,A(y)$. En fait, en notation complexe, $A\colon x\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

4. $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2\neq 0$ et $f^3=0$. Montrer que dans une certaine base $M_f=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Réponse : soit x tel que $f^2(x)\neq 0$ alors on prend la base $(x,f(x),f^2(x))$.

1.4. Racine de matrice

1. Racine p-ième de matrice :

   a. On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

      i. Exprimer A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

ii. En généralisant la formule précédente à $n=\frac{1}{p}$ (avec $p\in\mathbb{N}^*$), trouver l'expression d'une matrice B_p telle que $(B_p)^p = A$.

Réponse : $A^n = I + n\,N + \frac{n(n-1)}{2}N^2$ où $N = A - I$.

$B_p = I + \underbrace{\frac{1}{n}N + \frac{1-n}{n^2}N^2}_{M}$.

On est obligé de vérifier. Vu que $M^2 = \frac{1}{n^2}N^2$ c'est assez rapide.

b. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i. Exprimer A sous la forme $A = I + \alpha\,N + \beta\,N^2$.

ii. Résoudre $B^2 = A$ en cherchant B sous la forme $B = I + \beta'\,N + \gamma\,N^2$.

Réponse : $\beta' = \gamma = 1$.

1.5. Exponentielle de matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où $a\in\mathbb{R}$. Donner une formule pour A^n, puis déterminer :

$$E(A) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k.$$

Réponse : on pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et l'on a : $A^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}N^i\,a^{k-i}$.

L'astuce consiste à laisser la somme jusqu'à k et non pas jusqu'à 2 sinon l'interversion sera moins limpide.

Ensuite, on a $E(A) = \sum_{i\geqslant 0}\frac{1}{i!}N^i\sum_{k\geqslant i}\frac{1}{(k-i)!}a^{k-i} = \sum_{i\geqslant 0}\frac{1}{i!}N^i\times \mathrm{e}^a$ d'où finalement :

$$E(A) = \mathrm{e}^a\times\left(1 + N + \frac{1}{2}N^2\right).$$

en interver

2. Inverse de matrice

2.1. Calculs utilisant des polynômes

1. Inverser $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Réponse : $J = I + N$ et $(1+x)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^n) = \ldots$

2. Inverser $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Réponse : on utilise $(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n\,x^{n-1}) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)'$ et on trouve :

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Cas où un calcul simple (exemple : A^2) permet d'avoir A^{-1} 0

1. Inverser $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$.

   Réponse : On pose $A=\mu I+\lambda J$ où J n'a que des 1, et il suffit de calculer A^2.
   On trouve $A^2=(2(a-b)+n\,b)A+(b-a)(b(n-1)+a)I$ d'où un résultat de la forme $A(r\,A+s\,I)=t\,I$, puis :
   $A^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha=\dfrac{a+(n-2)b}{d}$ et $\beta=-\dfrac{b}{d}$, où $d=(a-b)(b(n-1+a))$.
   On peut procéder à des vérifications : $a=b$ ou $b=0$ par exemple.

2. $\omega=\mathrm{e}^{2i\pi/n}$ et $A=(a_{jk})$ avec $a_{jk}=\omega^{(j-1)(k-1)}$ avec n un entier et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
   Réponse : on trouve $A\,\bar{A}=n\,I$.

2.3. Calculs directs

1. Déterminer si $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ -a & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$ est inversible. Discuter selon a. Exprimer A^{-1}.

2. Inverses de matrices 2×2.

   a. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ b. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

   c. $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ (il y aura du dénominateur 12 puisque le déterminant vaut 12)

3. Inverse de :
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix};C=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
   Réponses :
$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 2 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix};B^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 9/2 & -19 \\ -1/5 & 1/2 & -1 \end{pmatrix};C^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -7 & -5 & -2 \\ -2 & 6 & 4/3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

4. Inverser $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ avec les cofacteurs.

5. Inverser $A=\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}=\left(\binom{j}{i}\right)_{ij}$.

   Réponse : c'est la matrice de $P(X)\to P(X+1)$ donc son inverse sera la matrice de $P(X)\to P(X-1)$ soit $A^{-1}=\left((-1)^{i+j}\binom{j}{i}\right)_{ij}$.

2.4. Résultats généraux

1. Hadamard : Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n.
   On dit que A est à diagonale strictement dominante si, pour tout j fixé, $|a_{j,j}|>\sum_{i\neq j}|a_{i,j}|$. Montrer qu'une telle matrice A est inversible.

Soit $X=(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $A\,X=0$ avec x_{i_0} de module maximal ($|x_{i_0}|=\mathrm{Max}\{|x_i|, i\in\{1,\ldots,n\}\}$). On a $a_{i_0,i_0}\,x_{i_0}+\sum_{i\neq i_0} a_{i,i_0}\,x_i=0$ donc on aurait $|a_{i_0,i_0}\,x_{i_0}|\leqslant\sum_{i\neq i_0}|a_{i,i_0}\,x_i|$ or on a $|a_{i_0,i_0}|>\sum_{i\neq i_0}|a_{i,i_0}|$ qui implique $|a_{i_0,i_0}\,x_{i_0}|>\sum_{i\neq i_0}|a_{i,i_0}\,x_i|$.

2.5. Méthode des combinaisons linéaires (pivot de Gauss)

On écrit P et I côte à côte et on manipule par des combinaisons linéaires (sur les lignes uniquement) les deux en parallèles. Quant on a I à gauche, on a P^{-1} à droite.

Inverser ainsi les matrices suivantes :

1. $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
   Réponse : $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

3. Matrice d'app linéaire

1. On pose :
   - $f(x,y,z)=(2x-z, y-z, -2z+x+y)$;
   - $g(x,y,z)=(-x-y, -z, -(z+x)-2y)$;
   - $h(x,y,z)=(2x-y, x+z)$;
   - $k(x,y,z)=(3x+y-z)$;
   - $j(x,y,z)=(x+y, z-x, 2x, -z+x-y)$.

   On demande la matrice de ces applications dans les bases canoniques $\mathcal{B}_0$ des espaces de départ et d'arrivée, et dans les bases échelonnées $\mathcal{B}=(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, \ldots)$

   Indication : on peut demander de résoudre des équations à trous :

   $$\begin{cases} (2,-1)_{\mathcal{B}}=(\ldots,\ldots)_{\mathcal{B}_0} \\ (2,-1)_{\mathcal{B}_0}=(\ldots,\ldots)_{\mathcal{B}}. \end{cases}$$

2. On pose $\varphi(P)=X\,P'(2X)+(X^2-1)P''(X)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   a. Trouver la matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$.
      Réponse :
      - on établit $\varphi(1,0,0)=(0,0,0)$ puis $\varphi(0,1,0)=(0,1,0)$ puis $\varphi(0,0,1)=(-2,0,6)$ donc $M_\varphi=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$;
      - on calcule $\varphi(a+b\,X+c\,X^2)=-2c+b\,X+6c\,X^2$ et on trouve pareil.

   b. Trouver la matrice de φ dans la base $(1, 1+X, 1+X+X^2)$.
3. On pose $\varphi(P)=P'$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. Écrire la matrice de φ. φ a-t-elle des vecteurs propres ? Que pensez-vous de φ^3 ? *(Bonne introduction aux matrices nilpotentes)*
4. On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis :

   $$f\colon \begin{cases} M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R}) \\ X\to A\,X+X\,A. \end{cases}$$

   a. Donner la matrice de f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que cette matrice est de rang <4 et en trouver le noyau.
      Réponse : on trouve par un calcul simple $\mathrm{Ker}\, f=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
5. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t)\mapsto(x+y+z+t, x+2y+3z+4t) \end{cases}$. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques et déterminer si f injective, surjective.

4. Petits calculs

4.1. Équations de matrices 2 × 2

On posera $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Résoudre $M^2=\lambda I$ d'inconnue $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec λ un réel.

   Réponse : on aboutit à $\begin{cases} a^2+b\,c=\lambda \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ b\,c+d^2=\lambda \end{cases}$ donc :

   - Soit $a+d=0$ et on aboutit à une matrice $\begin{pmatrix} \mu & b \\ c & -\mu \end{pmatrix}$ avec $b\,c+\mu^2=\lambda$.

     cas particuliers :

     - si $\lambda>0$: $M=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix}$ ou $M=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$.
     - si $\lambda<0$: $M=\begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{-\lambda} \\ -\sqrt{-\lambda} & 0 \end{pmatrix}$.

   - soit $a+d\neq 0$ et on aboutit à $\pm\sqrt{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $\lambda>0$.

2. Résoudre $M^2=\lambda M$ d'inconnue $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avec λ un réel.

   Réponse : on aboutit à :

$$\begin{cases} a(a-\lambda)=d(d-\lambda)=-b\,c & (1) \\ b(a+d-\lambda)=c(a+d-\lambda)=0 & (2), \end{cases}$$

   donc :

   - soit on choisit a,d tels que $\lambda=a+d$ alors (1) implique que M de déterminant nul : toute matrice de rang 1 ou 0 fonctionne alors.
   - soit $a+d\neq\lambda$ alors $b=c=0$ et donc on aboutit à $M=\lambda I$ ou $M=0$.

4.2. Divers

1. On pose $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

   - Calculer $(3I_2+4M)^2$; calculer $(3+4i)^2$;
   - Montrer que φ est une injection. Est-ce un isomorphisme ?

$$\varphi\colon\begin{cases} \mathbb{C}\to M_2(\mathbb{R}) \\ a+\mathrm{i}b\to a\,I_2+b\,M \end{cases},\ \text{avec } M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Réponse : c'est un morphisme injectif. Ainsi $\mathbb{C}$ peut être vu comme une « partie » de $M_2(\mathbb{R})$.

2. On pose $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ v_0 &= 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n+v_n \\ v_{n+1} &= 2v_n+u_n. \end{cases}$ On demande le terme général des deux suites u et v.

   Réponse :

   - Par matrice, $X_{n+1}=A\,X_n$ où $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On trouve (en écrivant $A=I+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) que $A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_n &= \dfrac{3^n+1}{2} \\ v_n &= \dfrac{3^n-1}{2}. \end{cases}$$

   - Par astuce : on a $u_{n+1}+v_{n+1}=3(u_n+v_n)$ et $u_{n+1}-v_{n+1}=u_n-v_n$ et on retrouve les mêmes résultats.

- Par astuce, en calculant les premiers termes et en devinant que les suites sont arithmético-géométriques.

3. Calculer $D = A\,B$ et $E = B\,A$ avec :
   a. $A = (a_{i,j}) = (i)$ et $B = (b_{i,j}) = (j^2)$;
   b. $A = (a_{i,j}) = (2^i 3^j)$ et $B = (b_{i,j}) = (3^i 2^j)$;
   c. $A = (a_{i,j}) = (i + j)$ et $B = (b_{i,j}) = (i - j)$;

   Réponses :
   a. $d_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n i \times j^2 = n\,i\,j^2$.
   $e_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n k^2 \times k = \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$: tous les coefficients de la matrice sont égaux.
   b. $d_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n 2^i 3^{2k} 2^j = 2^{i+j} \times \frac{9}{8} \times (9^n - 1)$.
   $e_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n 3^i 2^{2k} 3^j = 3^{i+j} \times \frac{4}{3} \times (4^n - 1)$
   c. $d_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n (i+k)(k-j) = \sum_{k=1}^n k^2 + (i-j)k - i\,j$
   $e_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n (i-k)(k+j) = \sum_{k=1}^n -k^2 + (i-j)k + i\,j$
4. $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $C = (c_{i,j})$ étant trois matrices, calculer le terme général de $(A\,B)\,C$, et en déduire que le produit de matrices est transitif. En déduire aussi une formule pour $\mathrm{tr}(ABC)$.
   Réponse : $(A\,B)\,C = (\sum_{\ell,k} a_{i,k}\, b_{k,\ell}\, c_{\ell,j})_{i,j}$ et $\mathrm{tr}(ABC) = \sum_{i,\ell,k} a_{i,k}\, b_{k,\ell}\, c_{\ell,i}$.
5. Montrer que $\mathrm{tr}(A\,B) = \mathrm{tr}(B\,A)$ par un calcul de double sommation. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace

5. Matrices semblables

5.1. Divers

1. Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

5.2. Montrer que deux matrices sont semblables

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$ sont semblables. Trouver toutes les matrices de passage P possibles.
   Réponse : on tente d'avoir $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ tels que :
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 16a - b \\ 232a - 15b \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 16c - d \\ 232c - 15d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}. \end{cases}$$
   On arrive rapidement à L_4 redondante donc le système équivaut à :
$$\begin{cases} 16a - b = 8c \\ 232a - 15b = 8d \\ 15c = a + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 16a - 8c \\ 232a - 15 \times 16a + 15 \times 8c = 8d \text{ (et on sait que } 232 = 16 \times 29) \\ 15c = a + d \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 16a - 8c \\ 28a + 15c = d \\ 15c = a + d, \end{cases}$$
   et la seconde ligne, en substituant $15c$, nous donne : $28a + a + d = d$ d'où $a = 0$.

On en déduit que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \boxed{P = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}}$ et je dois maintenant vérifier que $PA = BP$, ce qui est bon.

2. Montrer que A et B sont semblables, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse : pour e_1', prendre $x + y - z = 0$, mais e_1' étant dans l'image, forcément, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et du coup $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ convient. On prend ensuite $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour e_3' on a le choix par exemple $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que A et B sont semblables, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse : soient f et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ telles que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit B.

- on a $e_1' = e_1$;
- puis on résoud $BX = e_1 + X$ d'où $e_2' = \begin{pmatrix} k \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- puis on résoud $BX = e_2 + X$ d'où $e_3' = \begin{pmatrix} \ell \\ k/2 - 3/8 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- enfin on résoud $BX = e_3 + X$ d'où $e_4' = \begin{pmatrix} m \\ \ell/2 + 5/16 - 3k/8 \\ k/4 - 3/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}$ d'où $P = \dfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 5/2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{C})$, et en déduire A^n.

Réponse : $A = PBP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$ d'où $P^{-1} = -\frac{\mathrm{i}}{5} \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}$

5.3. Changement de base

1. On pose f de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_3, e_1 - 2e_2 + e_3)$.

Réponse : $M' = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$ diagonale. On vérifie que $\det M = \det M' = 0$ et que $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} M' = 0$.

2. On pose f de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_1 - e_2, e_2 + 2e_3, e_1 - e_2 - e_3)$.

Réponse : $M' = \begin{pmatrix} -1 & -25 & 12 \\ 0 & 19 & -9 \\ 0 & 35 & -17 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\det M = \det M' = 8$ et que $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} M' = 1$.

3. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$. Donner :

   a. la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$;

      Réponse : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   b. la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

      Réponse : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y+z \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix}$.

   On a $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant 3 et trace 3.

   Donner :

   a. la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$;

      Réponse : $M = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ de déterminant 3 et trace 3.

   b. la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

      Réponse : $M' = \begin{pmatrix} -15 & -10 & -23 \\ -3 & 0 & -4 \\ 12 & 7 & 18 \end{pmatrix}$ de déterminant 3 et trace 3.

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose φ définie par : $\begin{cases} \varphi(e_1) = e_3 \\ \varphi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 \\ \varphi(e_3) = e_3 \end{cases}$,

   et on pose aussi $\begin{cases} f_1 = e_1 - e_3 \\ f_2 = e_1 - e_2 \\ f_3 = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$

   On suppose que (e) est une base, montrer que (f) aussi, puis déterminer la matrice de φ dans (e) puis dans (f). Reconnaître φ.

   Réponse : on trouve $M_f(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc φ est la projection sur $\langle f_2, f_3 \rangle$ parallèlement à f_1.

6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = ((0,1,1),(1,1,0),(1,1,1))$ et en déduire A^n.

   Réponse : $M_{\mathcal{B}}(f) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on écrit cela $C = 2I + K$ avec $K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $K^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 2$.

$$A^n = \begin{pmatrix} (n+2)2^{n-1} & -n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ (n+2)2^{n-1} - 1 & 1 - n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

7. On donne $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_5 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_5 \end{pmatrix}$ avec les $\varepsilon_i \in \{-1,+1\}$.

   a) Trouver des valeurs de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5)$ pour que A et B soient semblables. Donner la matrice de passage.

b) Généraliser avec $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Réponse : a) il suffit de regarder l'image par A_5 de $\frac{e_1+e_5}{2}, \frac{e_2+e_4}{2}, e_3, \frac{e_1-e_5}{2}, \frac{e_2-e_4}{2}$.
On a alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5) = (1,1,1,-1,-1)$.
b) on trouve :

si $n = 2p$	si $n = 2p+1$
$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & \ddots & & \iddots & & \\ & & & 1 & & & \\ & & \iddots & & -1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & -1 \end{pmatrix}$
$(\varepsilon) = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ avec autant de 1 que de -1	$(\varepsilon) = (1, \dots, 1, 1, -1, \dots, -1)$ avec un 1 au milieu

6. Projecteurs & symétries

1. Matrice de la symétrie par rapport à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de direction $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose :
$$\begin{cases} F = \langle e_1 + e_2, e_3 + e_4 \rangle \\ G = \langle e_1 - e_2, e_3 - e_4 \rangle. \end{cases}$$
On demande la matrice de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

   Réponse : dans la base $(e_1+e_2, e_3+e_4, e_1-e_2, e_3-e_4)$, on a $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, j'ai $P\,M' = M\,P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ici l'inverse de P peut se deviner, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ d'où ensuite $M = P M' P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $P\colon x + 2y - z = 0$ et $\Delta = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. On demande les matrices de :

   a. f, la projection sur P parallèlement à Δ ;

   b. g, la projection sur Δ parallèlement à P ;

   c. h, la symétrie par rapport à P parallèlement à Δ ;

   d. j, la symétrie par rapport à Δ parallèlement à P ;

   Réponses : $M_f = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$; $M_g = I_3 - M_f = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$;
   $M_h = 2\,M_f - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Dans $\mathbb{R}^3$, soit f de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On demande $F = \mathrm{Ker}(f - 2I)$ et $G = \mathrm{Ker}(f - I)$.

   On pose ensuite p la projection sur F de direction G et q la projection sur G de direction F. On demande les matrices de p et de q.
   Calculer $2p + q$, en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

   - $\mathrm{Ker}(f - 2I) = \langle e_1, e_3 \rangle$ et $\mathrm{Ker}(f - I) = \langle e_2 - e_3 \rangle$. On trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ puis par le binôme on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}$.

5. On considère :

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \end{cases}.$$

   a. Montrer que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   b. Soient U_2 et H_2 deux sous-espaces de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: le premier contient les matrices de rang 1, et l'autre les homothéties. On considère U_2' et H_2' leur image par φ.
   Déterminer la matrice M de la projection sur U_2' selon H_2'.
   Réponse : on trouve $M = \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & & -1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

7. Polynômes de matrices

7.0.1. Divers

1. Si $P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0$, montrer que A inversible.
   Évident : on a $a_1 A + \cdots + a_n A^n = -a_0 I$ et on factorise par A à gauche.

7.0.2. Matrice compagnon

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$, appelée *matrice compagnon* de $P(X) = a_0 + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.

Déterminer le polynôme minimal $\pi_A(X)$ de la matrice A.
Réponse :

- $\chi_A(X) = P(X) - X^n$;
- puisque $\partial°(\pi) < n$, il est clair que $P(f)(e_1) \neq 0$, ainsi $\partial°(\pi) = n$;
- pour tout $i \in \{1; \ldots; n\}$, on a $P(A)(e_i) = A^n e_i$ donc $P(A) = A^n$;
- donc $\pi_A(X) = P(X) - X^n$.

8. Exercices divers

8.0.3. Isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ de deux manières différentes.
   On obtient l'identité de Lagrange $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a c - b d)(a d + b c)$.
   Cet exercice revient à calculer $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d)$ de deux manières différentes.