Réduction : diagonalisation, jordanisation

EC0201SB03

Table des matières

1. Rappels de Cours

1.1. Résumé

*** Si Φ est scindé (i.e. s'il y a n valeurs propres, éventuellement confondues) alors :**
- **soit A est diagonalisable (s'il y a une base de n vecteurs propres) ;**
- **soit A semblable à une Jordan (s'il manque des vecteurs propres).**

*** Si Φ n'est pas scindé (exemple $\Phi(X) = X^2 + 1$) alors on ne peut pas réduire la matrice (sauf à passer dans $\mathbb{C}$).**

Remarque 1.
1. Φ *non scindé*, cela signifie que Φ présente, quand on le factorise, des polynômes du second degré avec des discriminants négatifs.
   Exemples : $\Phi(X) = (X-2)^3(X-1)$ est scindé mais $\Phi(X) = X(X-1)(X^2+X+1)$ est non scindé.
2. [hors programme] Si l'on se place sur $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$, tout polynôme est scindé (théorème de D'ALEMBERT-GAUSS).
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un exemple de matrice de rotation qui n'a aucun vecteur propre ; son polynôme caractéristique $\Phi(X) = X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle (mais il a $\pm i$ comme racines).
4. Si $u_1, \ldots, u_n$ sont n vecteurs propres pour n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ <u>distinctes</u>,
   alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est automatiquement une base.
5. Si A est semblable à une matrice diagonale Δ, alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \Delta$ ce qui permet soit de vérifier les calculs, soit de diagonaliser astucieusement (voir le **3.2**).

Preuve de la remarque 4. dans le cas de $\mathbb{R}^3$ (légèrement hors programme de cet UE) :
il s'agit de considérer $\alpha\, u_1 + \beta\, u_2 + \gamma\, u_3 = 0$ et de prendre l'image par φ puis par φ^2 de cette relation, on obtient le système $\begin{cases} \alpha\, u_1 + \beta\, u_2 + \gamma\, u_3 = 0 \\ \alpha\, \lambda_1 u_1 + \beta\, \lambda_2 u_2 + \gamma\, \lambda_3 u_3 = 0 \\ \alpha\, (\lambda_1)^2 u_1 + \beta\, (\lambda_2)^2 u_2 + \gamma\, (\lambda_3)^2 u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ (\lambda_1)^2 & (\lambda_2)^2 & (\lambda_3)^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha\, u_1 \\ \beta\, u_2 \\ \gamma\, u_3 \end{pmatrix} = 0$
et la preuve se conclut en montrant que le déterminant de cette matrice est non nul. On trouve que ce déterminant est égal à $k(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)$ (déterminant de VANDERMONDE).

1.2. Dimension 2

1. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique Φ est du second degré :
   - Si $\Delta > 0$, il a deux racines (valeurs propres) distinctes et donc, chaque valeur propre ayant un vecteur propre, A est diagonalisable. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   - Si $\Delta < 0$, il n'a pas de racine, donc il n'y a pas de valeur propre, le polynôme n'est pas scindé, et Jordan ne s'applique pas. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Si $\Delta = 0$, il y a une racine double : soit A est diagonalisable, soit Jordan s'applique.
     Exemples : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ avec Jordan, ou $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonale.

1.3. Dimension 3

- Si $\Phi(X)$ possède trois racines distinctes, alors f possède forcément trois vecteurs propres, ils forment une base et f est diagonalisable.
  Exemple $M = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ 4 & 14 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$:
  valeurs propres $\mathrm{Sp}(f) = \{6, 12, 18\}$ et $M = P\Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 12 & \\ & & 18 \end{pmatrix}$.
- Si $\Phi(X)$ a une seule racine simple alors on ne peut pas réduire ($\Phi(X)$ n'est pas *scindé*).
  Exemple $M = \begin{pmatrix} 3,8 & 10,4 & -2,6 \\ -4 & -4 & -2 \\ 0,4 & 5,2 & 9,2 \end{pmatrix}$:
  alors $\Phi(X) = (X-9)(X^2+36)$: ni diagonalisation, ni Jordan (dans $\mathbb{R}$; on pourrait dans $\mathbb{C}$).
- Si $\Phi(X)$ a une seule racine triple, alors A n'est pas diagonalisable (sauf si elle est déjà diagonale). Mais on peut réduire en Jordan.

- Si $\Phi(X)$ a une racine double λ et une racine simple μ, alors tout dépend de la dimension de E_λ :
  - soit $\dim E_\lambda = 2$ et dans ce cas A est diagonalisable semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$;
  - soit $\dim E_\lambda = 1$ et dans ce cas A est semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$.

2. Exercices matrices 2×2

Calculer A^3 de trois manières différentes, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

Le polynome caractéristique est $\Phi_A(X) = X^2 - 3X + 2$, de racines 1 et 2.
La trace est $\operatorname{tr} A = 3$.

1. Par **Cayley-Hamilton** :
   on fait le quotient $X^3 = \Phi_A(X)\,Q(X) + R(X)$ avec $R(X) = a\,X + b$.
   - En remplaçant X par 1 puis par 2, on trouve $R(X) = 7X - 6$.
   - En remplaçant X par A, on trouve $A^3 = R(A) = 7A - 6I$.
2. Par **diagonalisation** : $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (on vérifie $\operatorname{tr} \Delta = 3$).
   On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
   On a alors $\Delta^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $A^3 = P\,\Delta^3\,P^{-1}$.
3. **Directement** : on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$ puis A^3.
4. Les trois méthodes donnent :
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -21 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 de trois manières différentes, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3,4 & -2,7 \\ 1,8 & -2,9 \end{pmatrix}.$$

Réponse :

Le polynome caractéristique est $\Phi_A(X) = X^2 - \frac{1}{2}X - 5$, de racines $\frac{5}{2}$ et -2.
La trace est $\operatorname{tr} A = 0,5$.

1. Par **Cayley-Hamilton** : On n'a pas besoin de faire le quotient ici : $\Phi_A(A) = 0$ donc on a directement $A^2 = \frac{1}{2}A + 5$.
2. **Diagonalisation** : $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (on vérifie $\operatorname{tr} \Delta = 0,5$).
   On calcule $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   On a alors $\Delta^2 = \begin{pmatrix} 6,25 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^2 = P\,\Delta^2\,P^{-1}$.
3. **Directement**, on calcule $A^2 = A \times A$.
4. Les trois méthodes donnent :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 6,7 & -1,35 \\ 0,9 & 3,55 \end{pmatrix}.$$

Remarque : pour calculer A^n, la diagonalisation est incontournable.

Calculer A^{-1} de trois manières différentes en reprenant les deux exemples ci-dessus.

Calculer A^n de deux manières différentes, avec :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi_A(X) = X^2 + 8X + 16 = (X+4)^2$ de racine double -4.
La trace est $\operatorname{tr} A = -8$.

1. Par **Cayley-Hamilton** : $X^n = (X^2 + 8X + 16)\,Q(X) + R(X)$ avec $R(X) = a\,X + b$.
   En prenant $X = -4$ on a $(-4)^n = -4\,a + b$.
   Mais ici cela ne suffit pas : il faudrait une seconde racine. L'idée est alors de dériver.

$3X^2 = (2X+8)\,Q(X) + (X^2+8X+16)\,Q'(X) + R'(X)$ et on remplace X par -4 :

$$n \times (-4)^{n-1} = a.$$

Ainsi, $b = (-4)^n + 4a = (-4)^{n-1} \times (4n-4)$.

Alors, $A^n = R(A) = n \times (-4)^{n-1} A + (-4)^{n-1} \times (4n-4)\, I$.

2. **Diagonalisation** : En résolvant $f(x) = -4x$, on trouve $2x + y = 0$ d'où un seul vecteur propre $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a alors $A \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, reste à trouver le vecteur $w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(w) = u - 4w$, ce qui donne le système $\begin{cases} -2x+y &= 1-4x \\ -4x-6y &= -2-4y \end{cases}$ on trouve $w\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ (on vérifie $\operatorname{tr}\Delta = -8$).

   On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Reste alors à déterminer Δ^n. On écrit $\Delta = -4\,I + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Note : N est dite *nilpotente*.

   On applique le binome, valable car $N\,\Delta = \Delta\,N$: $\Delta^n = \binom{n}{0} N^0 (-4I)^n + \binom{n}{1} N^1 (-4I)^{n-1}$, les autres termes sont nuls. On a ainsi $\Delta^n = (-4)^{n-1} \times \begin{pmatrix} -4 & n \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.
3. **Directement** : ce serait impossible à moins de le programmer par ordinateur.
4. Les deux méthodes donnent :

$$A^n = (-4)^{n-1} \begin{pmatrix} 2n-4 & n \\ -4n & -2n-4 \end{pmatrix}.$$

3. Exercices matrices 3×3

3.1. Diagonalisation

Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -0,6 & 3,8 & -1,2 \\ -1,4 & 2,2 & -0,8 \end{pmatrix}$; puis calculer M^2 de deux manières différentes.

Réponse : $M = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{20} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -8 & 4 & 4 \\ -1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Voir le fichier `diago1.pdf` dans la dropbox (lien en haut à gauche de cette page web).

Diagonaliser $M = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 50 & -17 & 5 \\ 50 & -25 & 13 \end{pmatrix}$; puis établir l'expression de M^n en fonction de n.

Réponse : La recherche des valeurs propres est grandement facilitée par les deux 0 sur la matrice. On trouve $\lambda = 2$ de multiplicité 2 et $\lambda = -3$ de multiplicité 1. L'espace propre E_2 est le plan vectoriel d'éqution $10x - 5y + z = 0$, il y a donc une infinité de choix possibles pour les deux vecteurs à écrire dans la matrice P.

On trouve par exemple :

$M = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -10 & 5 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -10 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Voir le fichier `diago2.pdf` dans la dropbox (lien en haut à gauche de cette page web).

3.2. Diagonalisations astucieuses

Il s'agit ici de deviner valeurs propres et vecteurs propres d'un coup, dans certains cas simples, en profitant de combinaisons de lignes et de colonnes.

3.2.1. Exemple 1, où trois vecteurs sont évidents

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

.

On remarque tout de suite que $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}8\\0\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$.

Donc A est diagonalisable avec $\Delta=\begin{pmatrix}8&&\\&-2&\\&&4\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

3.2.2. Exemple 2, où deux vecteurs sont évidents

Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}-8&-10&16\\-12&-2&12\\-12&-10&20\end{pmatrix}$.

On remarque tout de suite que $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}8\\0\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et il est difficile de voir le dernier vecteur propre. C'est alors a qu'on utilise la trace :

A est peut-être diagonalisable avec $\Delta=\begin{pmatrix}8&&\\&-2&\\&&?\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1&*\\0&1&*\\1&1&*\end{pmatrix}$, or $\operatorname{tr}A=10$ et $\operatorname{tr}\Delta=6+?$ donc $?=4$. On résoud alors le système $A\vec{X}=4\vec{X}$ et on a réduit A sans polynôme caractéristique.

3.2.3. Exemple 3, où un seul vecteur est évident

Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}-28&-50&50\\-56&-91&94\\-71&-118&121\end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est $\Phi_A(X)=-(X-3)(X+3)(X-2)$. Mais imaginons que le développement du déterminant nous conduise à la forme développée $\Phi_A(X)=X^3-2X^2-9X+18$. Vu qu'on ne sait pas résoudre le degré 3 sans racine évidente, on est coincé. On peut étudier les variations comme dans le fichier `diago1.pdf`, mais ici on a mieux : $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ donc on a immédiatement $\lambda=3$ comme valeur propre, et ainsi on peut, par identification, factoriser $\Phi_A(X)$ par $(X-3)$ et c'est gagné.

On trouve $\operatorname{sp}A=\{-3,2,3\}$ et : $E_{-3}=\operatorname{vect}(2,3,4)$, $E_2=\operatorname{vect}(5,-2,1)$, $E_3=\operatorname{vect}(0,1,1)$

3.3. Réduction de Jordan

3.3.1. Deux vecteurs propres seulement, jordanisation classique

Déterminer la réduction de Jordan de A avec :

$$A=\begin{pmatrix}-1&-8/3&-16/3\\-1/4&-13/6&-7/3\\1/8&5/4&3/2\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}7&-3,5&4\\0&3&0\\-8&7,5&-5\end{pmatrix}$$

Pour A

On a $\Phi_A(X)=X^3+\frac{5}{3}X^2+\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}=(X+1)^2\left(X-\frac{1}{3}\right)$ de racines -1 (double) et $\frac{1}{3}$ (simple).

La trace est $\operatorname{tr}A=-5/3$.

C'est intéressant car la matrice a le même polynôme caractéristique que la précédente et pourtant la précédente était diagonalisable et celle-ci n'est réductible que par Jordan comme on va le voir. Au fait, celle matrice a la même trace que la précédente, mais ça c'est logique vu qu'elles ont le même polynôme caractéristique. Voyez-vous pourquoi ? Réponse : la trace c'est le coefficient de X^2 (ou son opposé suivant comment on calcule $\Phi_A(X)$).

Le polynôme caractéristique a trois racines (en comptant les multiplicités) donc si ce n'est pas diago ce sera réductible en Jordan. *On dit qu'il est scindé.*

$E_{1/3}$ est de dimension 1, bien sûr. On trouve $u\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$.

On trouve E_{-1} de dimension 1 car le système aboutit à $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-2z \end{array}\right.$ donc par exemple $v\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche alors w tel que, dans $\mathcal{B}=(u,v,w)$, A devienne $\Delta=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ($\operatorname{tr}\Delta=-5/3$).

On résoud $f(w)=v-w$, cela donne $\left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y=-2z \end{array}\right.$ d'où par exemple $w\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $P=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A=P\,\Delta\,P^{-1}$.

Pour B

On trouve $M=P\,\Delta_J\,P^{-1}$ avec $\Delta_J=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & c & 1 \end{pmatrix}$ et $a+c=2$, par exemple $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et dans ce cas $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1,5 & -2 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Voir fichier `jordan1.pdf` dans la dropbox.

3.3.2. Une seule valeur propre, deux vecteurs propres, attention avec la jordanisation

Déterminer la réduction de Jordan de A, puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n, avec :

$$A=\begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi_A(X)=(X+6)^3$ (scindé) de racine -6 (triple) :

A sera donc soit diagonalisable soit jordanisable.

Diagonalisable est impossible sinon on aurait $\Delta=-6I$ donc $A=P\times(-6I)\times P^{-1}=-6PP^{-1}=-6I$ aussi, ce qui visiblement n'est pas le cas (seule la matrice identité est semblable à la matrice identité).

Le système pour trouver les vecteurs propres associés à $\lambda=-6$ se ramène à $-2x+2y=z$, donc E_{-6} est de dimension 2 et ses vecteurs ont pour expression $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y-2x \end{pmatrix}$ avec $x,\ y\in\mathbb{R}$: on peut prendre $u_{-6}=(0,1,2)$ et $u'_{-6}=(1,0,-2)$ comme base de E_{-6}.

Nous cherchons une base (u_{-6},u'_{-6},w) (avec $w=(x,y,z)$), dans laquelle f ait pour matrice $\Delta_j=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ (on vérifie que $\operatorname{tr}\Delta=\operatorname{tr}A=-18$ et qu'il y a autant de « 1 » que de vecteurs propres manquants).

L'équation $f(w)=u'_{-6}-6w$ aboutit à un blocage à cause de la ligne L_3, qui donne $0=-2$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} -8x+2y-z & = & 1-6x \\ -2x-4y-z & = & -6y \\ -6z & = & -2-6z. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -2x+2y-z & = & 1 \\ -2x+2y-z & = & 0 \\ 0 & = & -2. \end{array}\right.$$

Il faut être malin et remarquer que si $u'_{-6}=(a,b,c)$ alors :

$f(w)=u'_{-6}-6w \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -8x+2y-z & = & a-6x \\ -2x-4y-z & = & b-6y \\ -6z & = & c-6z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -2x+2y-z & = & a \\ -2x+2y-z & = & b \\ 0 & = & c \end{array}\right.$, on doit donc choisir un $u'_{-6}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y-2x \end{pmatrix}=(a,b,c)$ tel que $c=0$, ce qui donne par exemple $u'_{-6}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors : $f(w)=u'_{-6}-6w \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -2x+2y-z & = & 1 \\ -2x-2y-z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -2x+2y-z=1$ et l'on a l'embarras du choix, par exemple $w=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Conclusion, : $A=P\,\Delta_j\,P^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\Delta_j=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On trouve enfin $A^n=\dfrac{(-6)^n}{6}\begin{pmatrix} 2n+6 & -2n & n \\ 2n & 6-2n & n \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, voir corrigé détaillé dans la feuille `jordan_An1.pdf`

3.3.3. Une seule valeur propre, deux vecteurs propres, idem

Déterminer la réduction de Jordan de A avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi(X) = (X-2)^3$ et $E_2 = \text{vect}\left\{ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Posons $w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour avoir une matrice de Jordan $\Delta_j = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage $P = (u_2, u_2', w)$.

On veut $f(w) = u_2' + 2w$, ce qui donne $\begin{cases} y & = 2x \\ -4x + 4y & = 2y \\ -2x + y + 2z & = 1 + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$ qui ne marche pas...

Essayons la base $P = (u_2', u_2, w)$, alors $f(w) = u + 2w \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 1 + 2x \\ -4x + 4y & = 2 + 2y \\ -2x + y + 2z & = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 1 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$, qui ne marche toujours pas.

Alors on prend $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2' = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ b \end{pmatrix} = a \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On veut $f(w) = v + 2w$ ce qui donne cette fois-ci :

$$\begin{cases} y & = a + 2x \\ -4x + 4y & = 2a + 2y \\ -2x + y + 2z & = b + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x & = a \\ y - 2x & = a \\ y - 2x & = b \end{cases}$$

Il suffisait donc de prendre $a = b$ soit par exemple $u_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, correspondant à $a = b = 1$. On a alors le choix pour w, par exemple $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion, : $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.3.4. $\Phi_A(X)$ non scindé

Réduire si possible la matrice A avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $\Phi(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2 = (X+2)(X^2+1)$, non scindé donc pas de réduction : ni diagonalisation, ni Jordan.

Remarque : si l'on se plaçait dans $\mathbb{C}$, on pourrait diagonaliser la matrice en $\begin{pmatrix} -2 & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix}$ mais ceci est en dehors du programme de cet UE.

3.4. Matrices à paramètres

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 3k-6 & 6-2k & 7-3k \\ 3k-6 & 6-2k & 6-3k \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

1. Par combinaison et trace, trouver directement les trois valeurs propres.
2. A est-elle diagonalisable ?

Réponse :

1. On voit directement que $\varphi(1,1,0) = k\,(1,1,0)$ et $\varphi(1,0,1) = (1,0,1)$. On a donc 1 et 2 comme valeurs propres. $\Phi_A(X)$ est donc scindé, donc A est soit diagonalisable soit jordanisable, c'est-à-dire réductible en $\Delta_{(J?)} = \begin{pmatrix} 1 & * & \\ & k & * \\ & & ? \end{pmatrix}$, avec ? inconnu et les $*$ égaux soit à 1 soit à 0.

On a donc $\operatorname{tr} A = k+3 = \operatorname{tr}\Delta = 1+k+?$, d'où $? = 2$. On cherche le vecteur propre pour $\lambda = 2$, on trouve $u_2 = (4,3,2)$.

2. On remarque qu'on a trois vecteurs propres distincts qui forment une base. En effet :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ car échelonné.}$$

A est donc diagonalisable et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} k & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, de matrice $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 10-3t & 5t+2 & t-6 \\ 2-2t & 2t+10 & 2t-6 \\ 4-3t & t+4 & 5t-4 \end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. On admet que $\varphi_A(X) = -(X-2)^2 t + X(X-2)^2$.
2. Quel est l'ensemble des valeurs propres de A ?
3. Écrire le système $A\vec{X} = 2\vec{X}$ et vérifier que $L_1 + L_3 = 3L_2$.
4. Trouver les valeurs de t telles que les lignes de L_1 et de L_2 soient proportionnelles.
5. A est-elle diagonalisable ? Discuter suivant les valeurs de t.

Réponse :

1.
2. On a $\varphi_A(X) = -(X-2)^2 t + X(X-2)^2 = (X-2)^2 \times [-t+X]$ donc on a 2, de multiplicité 2, et t, de multiplicité 1.
3. On écrit (en multipliant tout par 4) :

$$\begin{cases} (10-3t)x + (5t+2)y + (t-6)z = 8x \\ (2-2t)x + (2t+10)y + (2t-6)z = 8y \\ (4-3t)x + (t+4)y + (5t-4)z = 8z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-3t)x + (5t+2)y + (t-6)z = 0 \\ (2-2t)x + (2t+2)y + (2t-6)z = 0 \\ (4-3t)x + (t+4)y + (5t-12)z = 0 \end{cases},$$

on vérifie que $L_1 + L_3 = 3L_2$ donc le système équivaut à :

$$\begin{cases} (2-3t)x + (5t+2)y + (t-6)z = 0 \\ (2-2t)x + (2t+2)y + (2t-6)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-3t)x + (5t+2)y + (t-6)z = 0 \\ t\,x - 3t\,y + t\,z = 0 \end{cases}.$$

4. Si les deux lignes sont équivalentes, alors E_2 sera de dimension 2 (un plan de $\mathbb{R}^3$), sinon de dimension 1 (droite comme intersection de deux plans non parallèles).

Les deux lignes sont colinéaires ssi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnels avec :

$$\vec{u}(2-3t, 5t+2, t-6)$$
$$\vec{v}(t, -3t, t).$$

* Déjà, si $t = 0$, le système équivaut à $(2-3t)x + (5t+2)y + (t-6)z = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z = 0$.

* Sinon, il suffit de regarder si

$2-3t$	$5t+2$	$t-6$
1	-3	1

est proportionnel, c'est-à-dire si :

$$\frac{2-3t}{1} = \frac{5t+2}{-2} = \frac{t-6}{1} \Leftrightarrow -6+9t = 2+5t = -3t+18 \Leftrightarrow t = 2.$$

* Dans le cas où $t = 2$, le système équivaut à $(2-3t)x + (5t+2)y + (t-6)z = 0 \Leftrightarrow -x + 3y - z = 0$ donc $E_2 = \operatorname{vect}((2,1,1),(1,0,-1))$.

* Si $t \neq 2$, on trouve $E_2 = \operatorname{vect}(2,1,1)$.

5. Conclusion :
   - si $t \neq 2$, alors $\dim E_2 = 1$ et $\dim E_t = 1$ donc $A \sim \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \neq 2 \end{pmatrix}$;
   - si $t = 2$, alors il n'y a plus que 2 comme valeur propre et $\dim E_2 = 2$ donc $A \sim \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
   - si $t = 0$ alors $\dim E_2 = 2$, c'est le seul cas où A est diagonalisable : $A \sim \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Exercices matrices 4×4

On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^{-1} directement, en posant un système à seize inconnues.
2. Trouver valeurs propres et vecteurs propres des matrices A et de B. Sont-elles diagonalisables ?
3. Existe-t-il des valeurs de λ et μ telles que $A\,B=B\,A$?

1. On pose $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\\ m & n & o & p\end{pmatrix}$ et on écrit que $A^{-1}\times A=I$ on a immédiatement, via le peigne :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & b & -\frac{\mu}{\lambda} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 0\\ 0 & 0 & o & 1\end{pmatrix}.$$

2. On trouve :

- $\mathrm{sp}(A)=\{\lambda_1,1_3\}$ et $u_\lambda=\begin{pmatrix}\mu\\0\\\lambda-1\\0\end{pmatrix}$ et $E_1=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, donc A diagonalisable, sauf le cas où ($\lambda=1$ et $\mu\neq 0$).
- $\mathrm{sp}(B)=\{-1,0,2,6\}$, donc B diagonalisable, et $u_6=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\3\end{pmatrix}$, $u_{-1}=\begin{pmatrix}6\\-1\\-8\\-5\end{pmatrix}$, $u_0=\begin{pmatrix}1\\1\\-5\\0\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

3. $B\,A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & \lambda+\mu & 0\\ 2 & 3 & \lambda+2\mu & 0\\ 3 & 2 & \lambda+3\mu & 0\\ 4 & 1 & \lambda+4\mu & 2\end{pmatrix}$ et $A\,B=\begin{pmatrix} 3\mu+1 & 2\mu+4 & \mu+1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 3\lambda & 2\lambda & \lambda & 0\\ 4 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ donc $A\,B=B\,A\Leftrightarrow(\mu=0;\lambda=1)$.

Réduire si possible la matrice A avec :

$$A=\begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & -1\\ 6 & 3 & 2 & -1\\ 26 & 7 & 10 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

On a $\Phi(X)=(X-1)(X-2)^3$, on trouve $u_1=(2,-1,-5,0)$ et $u_2=(3,-2,-8,0)$, ce sera un Jordan. On cherche $\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ donc w tel que $f(w)=u_2+2w$ on trouve un système qui nous demande de choisir, on peut par exemple prendre $w=(3,-2,-7,0)$ puis on cherche w' tel que $f(w')=w+2w'$, et alors on arrive à un système qui aboutit bien.

5. Applications

5.1. Calculs de A^n ou de A^{-1} de plusieurs manières possibles

5.1.1. $\Phi_A(X)$ a une racine double, associée à un seul vecteur propre, et une simple.

Calculer A^n avec :

$$A=\begin{pmatrix} -8 & 2 & -1\\ -2 & -4 & -1\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix},$$

1. Par Jordan.

Voir fichier `jordan2_An.pdf` dans la dropbox.

On trouve $A^n = \frac{(-6)^n}{6}\begin{pmatrix} 2n+6 & -2n & n \\ 2n & 6-2n & n \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

5.1.2. $\Phi_A(X)$ a une racine triple, associée à un seul vecteur propre, et on demande A^n

Calculer A^n avec :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

1. Par Cayley-Hamilton ;
2. Par Jordan.

On a $\Phi_A(X) = X^3 + 12X^2 + 48X + 64 = (X+4)^3$ de racine triple -4.

La trace est $\operatorname{tr} A = -12$.

1. Par **Cayley-Hamilton** : $X^n = (X^3 + 12X^2 + 48X + 64)\, Q(X) + a\, X^2 + b\, X + c$.

   On prend $X = -4$ puis on dérive et l'on prend $X = -4$ puis on redérive et encore $X = -4$:

$$\begin{cases} (-4)^n = 16a - 4b + c \\ n \times (-4)^{n-1} = -8a + b \\ n(n-1)(-4)^{n-2} = 2a \end{cases}.$$

   On trouve $R(X) = (-4)^{n-2} \times \left(\frac{n(n-1)}{2} X^2 + (4n^2 - 8n)X + (8n^2 - 24n + 16)\right)$.

   On prend $X = A$, alors $\boxed{A^n = (-4)^{n-2} \times \left(\frac{n(n-1)}{2} A^2 + (4n^2 - 8n)A + (8n^2 - 24n + 16)I\right)}$.

2. Par **Jordan** : E_{-4} est de dimension 1, on trouve le seul vecteur propre $u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On cherche alors $\mathcal{B} = (u, v, w)$ tels que dans $\mathcal{B}$, A devienne $\Delta = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ($\operatorname{tr} \Delta = -12$).

   On résoud d'abord $f(v) = u - 4v$, cela donne $\begin{cases} x - z = -1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$ d'où par exemple $v\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

   Puis on résoud $f(w) = v - 4w$, cela donne $\begin{cases} x - z = 1/4 \\ y = 1/4 \end{cases}$ d'où par exemple $w\begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$.

   Alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$ et $A = P\,\Delta\,P^{-1}$. On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

   Puis $\Delta^n = (-4I + N)^n$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ donc :

$$\Delta^n = (-4)^n I + (-4)^{n-1} n\, N + (-4)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2,$$

   et enfin $A^n = P\,\Delta^n P^{-1}$.

5.1.3. Matrice diagonalisable, on demande A^{-1}

Calculer A^{-1} de trois manières avec :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 12 \\ 2 & -7 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

1. Par Cayley-Hamilton ;
2. Par diagonalisation ;
3. Par cofacteurs, par double pivot de Gauss, par système.

On a $\Phi_A(X) = X^3 + \frac{5}{3}X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{1}{3} = (X+1)^2\left(X - \frac{1}{3}\right)$ de racines -1 (double) et $\frac{1}{3}$ (simple).

La trace est $\operatorname{tr} A = -5/3$.

1. Par **Cayley-Hamilton** : $A^3 + \frac{5}{3}A^2 + \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}I = 0$ donc $A\left(A^2 + \frac{5}{3}A + \frac{1}{3}I\right) = \frac{1}{3}I$,

   donc $A^{-1} = 3A^2 + 5A + I$, avec $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 8 & -24 \\ -4 & 17 & -24 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Par **Diagonalisation** :

   $E_{1/3}$ est de dimension 1, bien sûr. On trouve $u\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On trouve E_{-1} de dimension 2 car le système aboutit à $x - 2y + 6z = 0$.

   On peut choisir par exemple $v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/6 \end{pmatrix}$

   Finalement, $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (on vérifie que $\operatorname{tr} \Delta = \operatorname{tr} A = -5/3$)

   Évidemment, cette méthode est un peu bête ici car pour avoir A^{-1} il faut calculer P^{-1}...

   Cependant on peut remarquer que le calcul de P^{-1} avec les cofacteurs est assez simple car la matrice P comporte deux 0...

   Pour info, $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 8 & -12 \\ 2 & 4 & -12 \end{pmatrix}$.

   Enfin... $A^{-1} = P\,\Delta^{-1}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

3. On peut aussi procéder par la matrice des cofacteurs ou par double pivot de Gauss, ou par système.
4. Par toutes les méthodes, on trouve :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 12 \\ 2 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.2. Systèmes de suites récurrentes

5.2.1. Avec Cayley-Hamilton puis avec Jordan

Déterminer le terme général de (x_n, y_n, z_n) sachant que :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 5x_n - 17y_n + 25z_n \\ y_{n+1} &= 2x_n - 9y_n + 16z_n \\ z_{n+1} &= x_n - 5y_n + 9z_n \end{cases}.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{X_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ alors le système s'écrit $\overrightarrow{X_{n+1}} = A\,\overrightarrow{X_n}$ soit $\overrightarrow{X_n} = A^n\,\overrightarrow{X_{0v}}$.

On a $\Phi(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$, on divise X^n par $\Phi(X)$ on obtient :

$$X^n = Q(X)\,\Phi(X) + a\,X^2 + b\,X + c.$$

On remplace X par les racines de $\Phi(X)$ soit 1 et 2 mais cela ne suffira pas, on n'a pas de troisième racine puisque 2 est racine double.

Alors on utilise le principe : « x_0 racine double de $P \Leftrightarrow P(x_0) = P'(x_0) = 0$ ».

Donc on dérive et on remplace X par 2. Voici le système :

$$\begin{cases} 1 &= a + b + c \\ 2^n &= 4a + 2b + c \\ n \times 2^{n-1} &= 4a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 2^{n-1}(n-2) + 1 \\ b &= 2^{n-1}(8 - 3n) - 4 \\ c &= 2^{n-1}(2n - 6) + 4 \end{cases}.$$

On vérifie pour $n=3$.

À partir de là, vu que $\Phi(A)=0$ on a alors $\boxed{A^n = a\,A^2 + b\,A + c\,I}$.

Vu que $A^2 = \begin{pmatrix} 16 & -57 & 78 \\ 8 & -33 & 50 \\ 4 & -17 & 26 \end{pmatrix}$, on a $A^n = \begin{pmatrix} 16a+5b+c & -57a-17b & 78a+25b \\ 8a+2b & -33a-9b+c & 50a+16b \\ 4a+b & -17a-5b & 26a+9b+c \end{pmatrix}$ soit :

$$A^n = \begin{pmatrix} (2+3n)2^{n-1} & \dots & \dots \\ -2n\,2^{n-1} & \dots & \dots \\ -n\,2^{n-1} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

etc.. *finir* de *simplifier...*

Ainsi :

$$\overrightarrow{X_n} = \begin{pmatrix} (2+3n)2^{n-1}x_0 - (57a+17b)y_0 + (78a+25b)z_0 \\ -2n\,2^{n-1}x_0 - (33a+9b-c)y_0 + (50a+16b)z_0 \\ -n\,2^{n-1}x_0 - (17a+5b)y_0 + (26a+9b+c)z_0 \end{pmatrix},$$

ce qui est un peu long à écrire si l'on doit remplacer a, b, c par leur expression en fonction de n...

On pouvait aussi utiliser Jordan : on a $A = P\,\Delta\,P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

On détermine $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite il faut calculer $\Delta^n = \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^{n-1}(2+n) & \\ & & 2^n \end{pmatrix}$ par le binôme.

Puis on a $A^n = P \times \Delta^n \times P^{-1}$; on doit retrouver la même chose que par Cayley Hamilton.

5.2.2. Avec diagonalisation

Déterminer le terme général de (x_n, y_n, z_n) sachant que :

$$\begin{cases} x_{n+1} &=& \frac{1}{4}(x_n + 7y_n + 13z_n) \\ y_{n+1} &=& x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} &=& \frac{1}{4}(3x_n - 3y_n - 9z_n) \end{cases} \quad \text{et } \overrightarrow{X_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution : on trouve $\overrightarrow{X_n} = \frac{(-3)^n}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 1$, voir corrigé détaillé sur la dropbox, fichier du nom de `suite_vecteurs_1.pdf`.

5.3. Systèmes différentiels

Résoudre :

$$\begin{cases} x' &=& 10x + 8y - 3z \\ y' &=& 4x + 14y - 3z \\ z' &=& 12z \end{cases}.$$

On étudie $A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ 4 & 14 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, on a $\Phi_A(X) = (X-6)(X-12)(X-18)$ puis $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 12 & \\ & & 18 \end{pmatrix}$ et $A = P\,\Delta\,P^{-1}$.

Posons $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{Y} = P^{-1}\vec{X}$, le système s'écrit alors $\vec{X}' = A\,\vec{X} \Leftrightarrow \vec{X}' = P\,\Delta\,P^{-1}\vec{X}$ ce qui équivaut, en multipliant par P^{-1} par la gauche de chaque côté, à :

$$Y' = \Delta Y.$$

Si $\vec{Y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ on a alors $\begin{cases} x_1' = 6x_1 \\ y_1' = 12y_1 \\ z_1' = 18z_1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_1 = \lambda\,\mathrm{e}^{6t} \\ y_1 = \mu\mathrm{e}^{12t} \\ z_1 = \gamma\mathrm{e}18t \end{cases}$ puis on remarque que $\vec{X} = P\vec{Y}$ d'où :

$$\begin{cases} x = 2\lambda\mathrm{e}^{6t} + \mu\mathrm{e}^{12t} + \gamma\mathrm{e}^{18t} \\ y = -\lambda\mathrm{e}^{6t} + \mu\mathrm{e}^{12t} + \gamma\mathrm{e}^{18t} \\ z = 2\mu\mathrm{e}^{12t} \end{cases}.$$

Il peut arriver que A soit réductible en Jordan, auquel cas le calcul part sur le même principe, un peu plus long à partir de $Y' = \Delta Y$.

Remarque : il n'est pas nécessaire dans cette méthode de connaître P^{-1}.