Matrices

Table des matières

1. Déterminants

1.1. Matrices 3×3

1. Déterminant de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 0 & 9\end{pmatrix}$ et de $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -4 & 5 & 6\\ 7 & 0 & 9\end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $C=\begin{pmatrix} -2 & -8 & -1\\ 0 & 8 & 4\\ 1 & -3 & -3\end{pmatrix}$ a un déterminant nul, et trouver une combinaison linéaire entre les vecteurs-colonne. Trouver aussi une combinaison linéaire entre les vecteurs-ligne (par un système aussi).
3. Déterminer :
$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}.$$
Réponse : $(a+b+c)^3$.
4. Déterminer :
$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & a\,b\\ b^2 & a\,b & a^2\\ a\,b & a^2 & b^2\end{vmatrix}.$$
Réponse : $-(a^3-b^3)^2$.
5. Déterminer de deux manières :
$$D(x)=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x\\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha)\\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta)\end{vmatrix}.$$
   a. Soit $\Delta(x)=|\,C_1(x),C_2(x),C_3(x)\,|$, trouver une expression simple de $\Delta'(x)$, en déduire $D(x)$.
   b. Par multilinéarité.
   Réponses :
   a) $\Delta'(x)=|\,C_1'(x),C_2(x),C_3(x)\,|+|\,C_1(x),C_2'(x),C_3(x)\,|+|\,C_1(x),C_2(x),C_3'(x)\,|$
   donc $D'(x)=0$ donc $D(x)=C^{\text{ste}}=\sin(\alpha)-\sin(\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.
   b) par multilinéarité avec $\cos(u+v)$ et $\sin(u+v)$, ça marche très bien aussi.

1.2. Matrices 4×4

1. Déterminer :
$$\begin{vmatrix} x & a & b & x\\ b & x & x & a\\ x & b & a & x\\ a & x & x & b\end{vmatrix}.$$

Réponse : $(b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$.

2. Déterminer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

Réponse : on fait $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$ puis on remonte on trouve $\Delta = a(b-a)(c-b)(d-c)$.

1.3. Matrices $n \times n$

1. Trouver :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & \dots & a_1 - b_n \\ & & \vdots \\ a_n - b_1 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix}.$$

Réponse : On trouve 0 dès que $n > 2$. Preuve : remplacer C_i par $C_i - C_1$ ou L_i par $L_i - L_1$.
Reste à examiner le cas $n = 2$, on trouve $\Delta_2 = -2(a_2 b_1 + a_1 b_2)$.

2. Calculer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots. & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & \dots. & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Réponse :

- on remplace C_1 par $C_1 + \cdots + C_n$;
- on remplace L_n par $L_n - L_{n-1}$ puis L_{n-1} par $L_{n-1} - L_{n-2}$ jusqu'à L_2 par $L_2 - L_1$;
- on développe sur la première colonne ;
- on trouve $\boxed{\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1} n^{n-2}}$.

3. Déterminer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+\lambda_1 & & (a) \\ & \ddots & \\ (a) & & a+\lambda_n \end{vmatrix}.$$

Réponse : posons $K = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to i$-ème ligne.

On écrit alors $\Delta_n = \det(a\ K + \lambda_1\ E_1,\ \dots,\ a\ K + \lambda_n\ E_n)$ et on développe par la multilinéarité, on obtient $\Delta_n = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n + a \sum_{k=1}^{n} \prod_{i \neq k} \lambda_i$.

1.4. Divers

1. Voisinage d'une matrice inversible.
Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec A inversible et B non inversible.
Montrer qu'il existe un voisinage $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ de 0 tel que $\forall x \in I,\ A + x\, B$ est inversible.
Réponse : $\det(A + x\, B)$ est un polynôme $P(x)$, tel que $p(0) \neq 0$. Donc la continuité fournit la réponse.

2. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, C_2, \dots, C_n$. Soit B de colonnes :

$$C_2 - C_1, C_3 - C_2, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1.$$

Déterminer $\det B$.

Réponse : Les vecteurs $C_2 - C_1, C_3 - C_2, \ldots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$ sont liés puisque leur somme est 0. Donc $\det B = 0$.

3. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Dans quel cas peut-on affirmer que $\det(A) = 0$?

   Réponse : on a $\det(A) = (-1)^n \det(A)$ donc si n est impair $\det(A) = 0$. Sinon on ne peut rien dire, exemple simplissime $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$.

4. _Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \alpha \\ \alpha & & & 1 \end{pmatrix}.$$

   Trouver le rang de M_α en discutant selon α.

   Réponse : On trouve $\det M_\alpha = 1 + (-\alpha)^n$ en écrivant le premier vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et en utilisant la multilinéarité. Et on remarque que lorsque $\det M_\alpha = 0$, le rang de M_α vaut $n-1$ car il y a un sous-bloc carré d'ordre $n-1$ inversible.

5. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$: $M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$.

   On note $V = \{M(a,b,c,d), a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$.

   a. Montrer que V est stable par somme, différence, et produit de matrice.

   b. Soit $M \in V$ telle que $\det(M) = \pm 1$, montrer que $M^{-1} \in V$.

   c. Soit G l'ensemble des matrices M inversibles de V telles que M^{-1} est aussi dans V. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe et que $G = \{M \in V, \det(M) = \pm 1\}$.

   d. Montrer que $G = \{\pm I, \pm J, \pm J^2, \pm J^3\}$ et que $G \sim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

   Réponses :

   a. $V = \{a\, I + b\, J + c\, J^2 + d\, J^3, a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ donc V est un anneau.

   b. On utilise la matrice des cofacteurs, il est aisé de voir que $M \in V \Rightarrow \tilde{M} \in V$, on en déduit que si $\det M = \pm 1$ alors $M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t\widetilde{M}$ est aussi dans V.

   c. L'identité I_4 est dans G donc $G \neq \emptyset$.

      De plus, donc V est stable par produit de matrices. Et G est stable par inverse, par hypothèse.

      Enfin, si $M^{-1} \in V$ alors $\det(M^{-1}) \in \mathbb{Z}$ donc, vu que $\det(M) \times \det(M^{-1}) = 1$, on a bien $\det(M) = \det(M^{-1}) = \pm 1$.

   d. Il suffit de résoudre $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = \pm 1$, on trouve a, b, c ou d qui vaut ± 1 et les trois autres nuls. Ainsi, φ convient avec :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \to & G \\ (\varepsilon, i) & \to & (-1)^\varepsilon \times J^i. \end{cases}$$

6. Résoudre pour $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x + a\, y + a^2 z = 0 \\ \bar{a} x + y + a\, z = 0 \\ \bar{a}^2 x + \bar{a} z + z = 0 \end{cases}$$

   Réponse : le système est de Cramer pour $|a| = 1$. S'il ne l'est pas, il est équivalent à $x + a\, y + a^2\, z = 0$.

1.5. Déterminants des matrices tridiagonales

1.5.1. Cas général, double récurrence

On pose :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

Trouver une relation de récurrence double pour D_n.

Réponse : $D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2}$.

1.5.2. Applications

1. On pose :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix},$$

(la matrice étant $n \times n$). Calculer D_n avec $a = 7, b = 25, c = 1/2$ puis avec $a = 1, b = \mathrm{i}, c = 6$.

Réponse : on utilise la double récurrence $D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2}$ qui, ici, donne :

$$D_n = a D_{n-1} - b c D_{n-2}.$$

On exploite ensuite les conditions initiales.

2. Déterminer :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}.$$

Réponse : On a $D_n = (a+b) D_{n-1} - a b D_{n-2}$. Ainsi :

- si $a \neq b$, on a $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$;
- si $a = b$, on a $D_n = (n+1) a^n$.

3. Déterminer :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

Réponse : $D_n = 2\cos\theta\, D_{n-1} - D_{n-2}$ et l'équation caractéristique a pour racines $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ ce qui donne ensuite $D_n = \alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \beta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$, en identifiant sur $n = 1$ et $n = 2$ on trouve :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\sin\theta} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{cotan}\,\theta + \mathrm{i}) \\ \beta = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\sin\theta} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{cotan}\,\theta - \mathrm{i}), \end{cases}$$

on pouvait aussi démontrer par récurrence que $D_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$.

2. DÉTERMINANTS PAR BLOCS

Dans tout ce qui suit, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det\begin{pmatrix} A & * \\ 0_n & B \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(B)$.

Par combinaisons : $\det\begin{pmatrix} A & * \\ 0_n & B \end{pmatrix} = \det(A_1, \ldots, A_n, *+B_1, \ldots, *+B_n)$ or tous les $\det(A_1, \ldots, A_n, *+B_1, \ldots, *, \ldots, *+B_n)$ sont nuls ($n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$).

2. Montrer que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 - B^2)$.

   Réponse : on fait $C_i \leftarrow C_i + C_{i+n}$ puis $L_{i+n} \leftarrow L_{i+n} - L_i$ d'où :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$.

   On fait $C_i \leftarrow C_i + \mathrm{i}C_{i+n}$ puis $L_{i+n} \leftarrow L_{i+n} - \mathrm{i}L_i$ d'où :

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A - \mathrm{i}B & -B \\ B + \mathrm{i}A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A - \mathrm{i}B & B \\ 0 & A + \mathrm{i}B \end{pmatrix} = |\det(A + \mathrm{i}B)|^2.$$

On a d'ailleurs aussi $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 + B^2)$.