Systèmes linéaires

Table des matières

1. Systèmes avec paramètre

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ en discutant suivant $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y+z & = & 4 \\ -x+m\,y+2z & = & 5 \\ 7x+3y+(m-5)z & = & 7. \end{array}\right.$$

Réponse : pour $m=1$, $S=\emptyset$; pour $m=6$, la solution est une droite, et pour $m \notin \{1;6\}$, il y a un unique point solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ en fonction de $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=3 \\ x+m\,y+z-m\,t=m+2 \\ m\,x-y-m\,z-t=-1. \end{array}\right.$$

Réponse :

- le déterminant est $\Delta = 2m\,(1-m)$;
- pour $m=1$ on trouve une droite $S=\left\{\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 2-\lambda \\ z & = & \lambda \\ t & = & 0 \end{array}\right. \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$;
- pour $m=0$ on trouve un plan $S=\left\{\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-\lambda \\ y & = & 1-\mu \\ z & = & \lambda \\ t & = & \mu \end{array}\right. \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$;
- pour $\mu \notin \{0;1\}$ on trouve un plan $S=\left\{\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-y-z-t \\ y & = & 1+t\dfrac{m+1}{m-1} \\ z & = & \dfrac{(2m-1)}{(m-1)}+\dfrac{t(m+1)}{m(m-1)} \\ t & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$

3. Résoudre pour $a \in \mathbb{C}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+a\,y+a^2z=0 \\ \bar{a}x+y+a\,z=0 \\ \bar{a}^2x+\bar{a}y+z=0 \end{array}\right.$$

Réponse : le système est de Cramer pour $|a|=1$. S'il ne l'est pas, il est équivalent à $x+a\,y+a^2\,z=0$.

4. Résoudre pour $a,b,c \in \mathbb{R}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} (b+c)^2\,x+b^2\,y+c^2z & = & 1 \\ a^2\,x+(c+a)^2\,y+c^2\,z & = & 1 \\ a^2x+b^2\,y+(a+b)^2\,z & = & 1 \end{array}\right.$$

Réponse :

Le déterminant est $2a\,b\,c(a+b+c)^3$, on le trouve par :

a. $L_2 \leftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-L_1$;

b. factoriser par $(a+b+c)^2$;

c. $C_1 \leftarrow C_1-C_2-C_3$;

d. Sarrus.

et l'on a comme solutions :

- cas général :
$$x=\frac{a^2-(b-c)^2}{2a\,b\,c\,(a+b+c)},\ y=\frac{b^2-(a-c)^2}{2a\,b\,c\,(a+b+c)},\ z=\frac{c^2-(b-a)^2}{2a\,b\,c\,(a+b+c)}\ ;$$
- cas particulier a nul et b, c non nuls :
$$S \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)^2\,x+b^2\,y+c^2z &= 1 \\ c^2\,y+c^2\,z &= 1 \\ b^2\,y+b^2\,z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)^2\,x+b^2\,y+c^2z = 1 \\ y+z=\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{c^2} \end{cases}$$
donc soit $b\neq c$ (aucune solution) soit $b=c$ et alors $\begin{cases} x=0 \\ y+z=\frac{1}{b^2} \end{cases}$ c'est une droite ;
- cas particulier a, b nuls et c non nul :
$$S \Leftrightarrow \begin{cases} c^2\,x+c^2z &= 1 \\ c^2\,y+c^2\,z &= 1 \\ 0 &= 1 \end{cases} \text{(aucune solution) ;}$$
- cas particulier a, b, c non nuls mais $a+b+c=0$:
$$S \Leftrightarrow\ a^2\,x+b^2\,y+c^2z=1\ \ \text{(c'est un plan).}$$