E.V. normés

Table des matières

Feuille en cours de rédaction

Note 1. Métaphore pour une norme plus fine qu'une autre :

Une norme plus fine ne se laisse pas aussi facilement embarquer à tendre 0 ni à confondre deux vecteurs : elle garde ses distances.

1. Normes sur des espaces de polynômes

1.1. Différentes normes sur $\mathbb{R}[X]$

1.1.1. Présentation

Soit $P(X) = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On définit :

normes à partir des dérivées	$\|P\|_d = \sum_{k \geqslant 0} \|P^{(k)}(0)\|$	$\|P\|'_d = \mathrm{Sup}_{k \geqslant 0} \|P^{(k)}(0)\|$	
normes à partir des coefficients	$\|P\|_c = \sum_{k \geqslant 0} \|a_k\|$	$\|P\|'_c = \mathrm{Sup}_{k \geqslant 0} \|a_k\|$	$\|P\|_h = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\|a_k\|}{k+1}$
norme du sup sur un compact	$\|P\|_\infty = \underset{x \in [0,1]}{\mathrm{Sup}} \|P(x)\|$		
normes ésotériques	$\|P\|_p = \underset{x \in [0,1]}{\mathrm{Sup}} \|(P - P')(x)\|$		

1.1.2. Polynômes qui serviront pour distinguer les normes

On pose tout d'abord :

$A_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$	$B_n(X)=X^n$	$C_n(X)=\sum_{k=0}^{n}X^k$	$D_n(X)=(X(1-X))^n$
			$E_n(X)=(X-1/2)^n$

1.1.3. Comparaisons

Soit un polynôme $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$.

- Montrons que $\|P\|_\infty<\|.\|'_c<\|.\|_c<\mathrm{e}\|.\|'_d<\mathrm{e}\,\|.\|_d$:
  - $\|P\|_\infty\leqslant\mathrm{Sup}|a_kx^k|\leqslant\mathrm{Sup}|a_k|=\|P\|'_c$ et D_n ou E_n montrent que $\boxed{\|.\|_\infty<\|.\|'_c}$.
  - $\|P\|'_c\leqslant\|P\|_c$ évident, de plus C_n montre que $\boxed{\|.\|'_c<\|.\|_c}$ car $\lim\limits_n\|C_n\|_c=+\infty$ tandis que $\|C_n\|'_c=C^{\text{ste}}=1$.
  - $\|P\|_c=\sum\frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}\leqslant\mathrm{Sup}|P^{(k)}(0)|\times\sum\frac{1}{k!}\leqslant\mathrm{e}\times\|P\|'_d$. Et l'exemple de B_n montre que $\boxed{\|.\|_c<\mathrm{e}\|.\|'_d}$ car $\|B_n\|_c=C^{\text{ste}}=1$ tandis que $\|B_n\|'_d=n!\to+\infty$.
  - $\|P\|'_d\leqslant\|P\|_d$ évident, en outre A_n montre que $\boxed{\|.\|'_d<\|.\|_d}$ car $\|A_n\|'_d=C^{\text{ste}}=1$ tandis que $\|A_n\|_d=n+1\to+\infty$.
- Montrons que $\|.\|_h<\|.\|_c$:
  - Clairement $\|P\|_h\leqslant\|P\|_c$ et B_n montre que $\boxed{\|.\|_h<\|.\|_c}$ car $\|B_n\|_h=\frac{1}{n+1}\to0$ tandis que $\|B_n\|_c=1$.
- Montrons que $\|.\|_h$ n'st pas comparable ni à $\|.\|'_c$ ni à $\|.\|_\infty$:
  - $\|B_n\|_h=\frac{1}{n+1}\to0$ tandis que $\|B_n\|_\infty=1$
  - $\|C_n\|_h=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\to+\infty$ tandis que $\|C_n\|'_c=1$;
- Montrons que $\|.\|_p$ n'est comparable ni à $\|.\|_\infty$ ni à $\|.\|'_c$ ni à $\|.\|_c$:
  - $\|A_n\|_p\to0$ mais $\|A_n\|_\infty\to\mathrm{e}$
  - $\|B_n\|_p=n-1\to\infty$ mais $\|B_n\|_c=1$
- ***Montrons que $\|.\|_p<(1+2\varepsilon)\|.\|'_d$:
  - On a :

$$\begin{aligned}\|P\|_p &= \sup_{x\in[0,1]}|(a_0-a_1)+(a_1-2a_2)x+\ldots+(a_{n-1}-n\,a_n)x^{n-1}+a_n\,x^n|\\ &\leqslant |a_0-a_1|+|a_1-2a_2|+\ldots+|a_{n-1}-n\,a_n|+|a_n|\\ &\leqslant |a_0|+2|a_1|+3|a_2|+\ldots+(n+1)|a_n|\\ &=|P^{(0)}(0)|+\frac{2}{1!}|P^{(1)}(0)|+\frac{3}{2!}|P^{(2)}(0)|+\ldots+\frac{n+1}{n!}|P^{(n)}(0)|\\ &\leqslant \|P\|'_d\times\left(1+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\ldots+\frac{n+1}{n!}\right)\\ &=\|P\|'_d\times\left(1+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!}\right)\\ &\leqslant \|P\|'_d\times(1+2\mathrm{e}).\end{aligned}$$

L'exemple A_n montre que $\|.\|_p<(1+2\mathrm{e})\|.\|'_d$ car $\|A_n\|_p\to0$ mais $\|A_n\|'_d=C^{\text{ste}}=1$.***

1.1.4. Conclusion

$\|\|_\infty$ est la norme la moins fine parmi les exemples proposés et l'on a la hiérarchie suivante :

<table>
<tr><td rowspan="3">(moins fine)</td><td>$\|.\|_\infty$</td><td>$\|.\|'_c$</td><td rowspan="2">$\|.\|_c$</td><td rowspan="2">$\|.\|'_d$</td><td rowspan="3">$\|.\|_d$</td><td rowspan="3">$\|.\|_d$</td><td rowspan="3">(plus fine)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\|.\|_h$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\|.\|_p$</td><td></td></tr>
</table>

1.1.5. Rappel de la définition des normes étudiées

normes à partir des dérivées	$\|P\|_d = \sum_{k\geqslant 0} \|P^{(k)}(0)\|$	$\|P\|'_d = \mathrm{Sup}_{k\geqslant 0} \|P^{(k)}(0)\|$	
normes à partir des coefficients	$\|P\|_c = \sum_{k\geqslant 0} \|a_k\|$	$\|P\|'_c = \mathrm{Sup}_{k\geqslant 0} \|a_k\|$	$\|P\|_h = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\|a_k\|}{k+1}$
norme du sup sur un compact	$\|P\|_\infty = \underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Sup}} \|P(x)\|$		
normes ésotériques	$\|P\|_p = \underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Sup}} \|(P-P')(x)\|$		

1.1.6. Reste à faire

Reste à voir si $\|.\|_p$ est comparable à $\|.\|'_h$.

Reste à montrer que les coefficients de majoration sont optimaux...

2. Normes sur les espaces de suites réelles

2.1. Différentes normes sur $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (suites bornées)

2.1.1. Présentation

Soit $u = (u_n)$ une suite réelle bornée, on pose :

- $\|u\|_\infty = \mathrm{Sup}|u_n|$;
- $\|u\|_\Delta = \mathrm{Max}\left\{|u_0|, \underset{n\geqslant 0}{\mathrm{Sup}}|u_{n+1} - u_n|\right\}$;
- $\|u\|_d = \mathrm{Sup}(|u_n| + |u_{2n}|)$;

2.1.2. Suites qui serviront pour distinguer les normes

On pose tout d'abord : $u_{k,n} = 1 - \mathrm{e}^{-kn}$

2.1.3. Comparaisons

Pour toute suite réelle bornée u, on a :

- $\|u\|_\Delta \leqslant 2\,\|u\|_\infty$, c'est clair. La suite de suites (u_k) montre en outre que $\boxed{\|.\|_\Delta < 2\|\|_\infty}$ car $\|u_k\|_\Delta = 1 - \mathrm{e}^{-k} \to 0$ alors que $\|u_k\|_\infty = C^{\text{ste}} = 1$.
- Clairement $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_d$ et $\|u\|_d \leqslant \sup(|u_n|) + 2\mathrm{Sup}|u_{2n}| = 2\|u\|_\infty$ donc $\boxed{\|.\|_\infty \sim \|.\|_d}$.

2.1.4. Conclusion

On a la hiérarchie suivante :

(moins fine)	$\|.\|_\Delta$	$\|.\|_d \sim \|.\|_\infty$	(plus fine)

2.1.5. Remarques diverses

$\|u\|_d = \mathrm{Sup}|u_n + u_{2n}|$ n'est pas une norme, car la suite définie par $u_{L\times 2^k} = (-1)^k$ pour tout L impair vérifie : $\|u\|_d = 0$.

2.1.6. Reste à faire

Étudier $\|u\|_1 = \sum |u_n|$ et $\|u\|_2 = \left(\sum |u_n|^2\right)^{1/2}$ dans les espaces ℓ_1 et ℓ_2.

voir les normes qui dérivent d'un produit scalaire et celles qui n'en dérivent pas.

3. Normes sur les espaces de fonctions réelles

3.1. Différentes normes sur $\mathcal{C}$: $[0;1] \to \mathbb{R}$ (fonctions continues)

3.1.1. Présentation

Soit f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose :

- $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$;
- $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f^2(t)|\,\mathrm{d}t}$;
- $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |f^p(t)|\,\mathrm{d}t}$;
- $\|f\|_\infty = \underset{[0,1]}{\mathrm{Sup}}|f|$.

On peut aussi se placer sur les fonctions C_∞ sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$ et poser :

$N_1(f) = \mathrm{Sup}|f''| + \mathrm{Sup}|f|$

$N_2(f) = \mathrm{Sup}|f + f''|$

On peut montrer que $N_1 \sim N_2$ mais elles ne sont pas équivalentes à $\|.\|_\infty$.

3.1.2. Fonctions qui serviront pour distinguer les normes

Considérons les deux fonctions a_n et b_n suivantes :

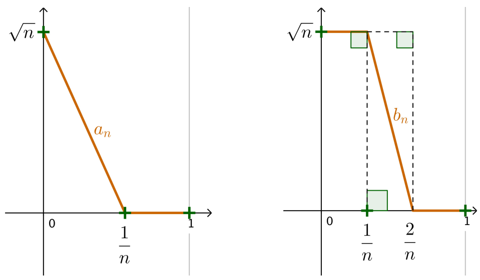

Figure 1. Fonctions a_n et b_n.

3.1.3. Comparaisons

Soit f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ continue :

- Clairement $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$. L'exemple (a_n) nous montre même que $\boxed{\|.\|_1 < \|.\|_\infty}$ car $\|a_n\|_1 \to 0$ tandis que $\|a_n\|_\infty = C^{\mathrm{ste}} = 1$.
- Idem pour $\|.\|_2$ on a donc $\boxed{\|.\|_2 < \|.\|_\infty}$ et même $\boxed{\|.\|_k < \|.\|_\infty}$ pour tout $k \geqslant 1$.
- Par Cauchy-Schwartz, $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$, car $\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)| \times 1\,\mathrm{d}t = <|f|, 1>_2$ où l'on pose $<f, g>_2 = \int_1^1 f(t) \cdot g(t)\,\mathrm{d}t$, et donc $\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_2 \times \|1\|_2 = \|f\|_2$. L'exemple (b_n) montre même que $\boxed{\|.\|_1 < \|.\|_2}$ car :
$$\|b_n\|_1 \leqslant \frac{2}{n} \times \sqrt{n} \to 0,$$
(aire du grand rectangle) tandis que :
$$\|b_n\|_2 \geqslant \frac{1}{n} \times n = 1,$$
(aire du petit rectangle).
- Il faudrait montrer que $\boxed{\|.\|_2 < \|.\|_\infty}$

3.1.4. Conclusion

On a la hiérarchie suivante :

(moins fine)	$\|.\|_1$	$\|.\|_2$	$\|f\|_\infty$	(plus fine)

3.1.5. Reste à faire

Regarder du côté de $\|f\| = \max\{|f(0)|, \|f'\|_\infty\}$ si ça serait bien une norme et où la placer.

Travailler un peu plus du côté des espaces L_p.

Refaire la figure avec MatPlotLib