Ev euclidiens

Table des matières

Dans toute cette page, E désigne un espace euclidien (i.e. muni d'un produit scalaire) et de dimension finie.

1. Gram-Schmidt : rappel de cours

Soit $(e'_1, \dots, e'_n)$ orthonormée, soit $E'_n = \mathrm{vect}(e'_1, \dots, e'_n)$.

Soit $e_{n+1} \notin E'_n$. On détermine $p_{E'_n}(e_{n+1}) = \sum_{k=1}^n \langle e'_k, e_{n+1}\rangle\, e'_k$.

Puis on prend $e_{n+1} - p_{E'_n}(e_{n+1})$, que l'on normalise pour obtenir e'_{n+1}.

2. Gram-Schmidt Dans $\mathbb{R}^n$

1. Orthonormaliser les trois vecteurs $\vec{e_1}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_3}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

   Réponse : On garde $\vec{e'_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_1}$, on a ensuite $\vec{a_2} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\8\end{pmatrix}$ puis $\vec{a_3} = \dfrac{1}{32}\begin{pmatrix}33\\-58\\33\\-20\end{pmatrix}$.

2. Orthonormaliser les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   Réponse : $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{7\sqrt{427}}\begin{pmatrix}-4\\13\\11\\-11\end{pmatrix}$.

3. Projeté sur $F = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 2\\3\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\5 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathbb{R}^4$.

3. DANS $\mathbb{R}_n(X)$

3.1. Avec $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ(t)\,\mathrm{d}t$

3.1.1. Calculs divers

1. Projeté sur $F = \mathrm{vect}(X, X^2)$ dans $\mathbb{R}^4[X]$.
2. Orthonormaliser les vecteurs $1, X, X^2$ pour le produit scalaire (on vérifiera que c'en est un) $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ(t)\,\mathrm{d}t$.
   Réponse : on trouve $1, 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(X^2 - X - \frac{1}{6}\right)$.

3.1.2. Une projection

Déterminer le projeté de X^4 sur $\mathbb{R}_1[X]$. En déduire $\underset{a,b}{\mathrm{Min}} \int_0^1 (x^4 - a\,x - b)^2\,\mathrm{d}x$.
Retrouver ce résultat par un calcul direct.

Par projection

$\underset{a,b}{\mathrm{Min}} \int_0^1 (x^4 - a\,x - b)^2\,\mathrm{d}x$ peut se voir comme $\underset{a,b}{\mathrm{Min}} \|x^4 - a\,x - b\|$ avec $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ(t)\,\mathrm{d}t$.
$(1, X)$ s'orthonormalise en $\left(1, \sqrt{3}\,(2X - 1)\right)$ d'où le projeté :

$$\langle X^4, P_0\rangle\, P_0 + \langle X^4, P_1\rangle\, P_1 = \frac{4X + 1}{5}.$$

La distance est :

$$I_{\min} = \left\langle X^4, \frac{4X+1}{5}\right\rangle = \int_0^1 x^4\left(x^4 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{225}.$$

Par calcul direct

Calcul direct : $I(a,b) = \frac{1}{3}\left(a + \frac{3\,b}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(b + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{225}$ donc le minimum saute aux yeux, juste en rappelant qu'un carré est toujours positif.

Autres

On pouvait aussi passer par un calcul de fonctions à deux variables :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x^4 - a\,x - b)^2\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x^8 - 2a\,x^5 - 2b\,x^4 + a^2x^2 + 2a\,b\,x + b^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{9} - \frac{2a}{6} - \frac{2a}{5} + \frac{a^2}{3} + a\,b + b^2. \end{aligned}$$

Ensuite on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial b} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b + \dfrac{2a}{3} - \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{6} = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b + \dfrac{2a}{3} - \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{6} = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,4 \\ b = 2,2 \end{cases} \dots \end{aligned}$$

3.2. Avec $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} PQ(t)\,\mathrm{d}t$

1. Orthonormaliser $1, X, X^2, X^3$.
   On trouve :
$$\begin{cases} Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ Q_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X \\ Q_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \dfrac{3X^2-1}{2} \\ Q_3 = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \dfrac{5X^3-3X}{2} \end{cases}$$

2. On prend $E_n = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] / \int_{-1}^{1} P^2(t)\,\mathrm{d}t = 1 \right\}$.
   Montrer que $\operatorname{Sup}_{E_2}\left(\operatorname{Sup}_{[-1;1]} |P|\right)$ est majoré par $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
   Réponse : soit $P \in E_2$, écrivons $P = a\ Q_0 + b\ Q_1 + c\ Q_2$ alors $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

donc :
$$\begin{aligned} |P(t)| &\leqslant |a| \operatorname{Sup}|Q_0| + |b| \operatorname{Sup}|Q_1| + |c| \operatorname{Sup}|Q_2| \\ &\leqslant \underbrace{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}_{1} \sqrt{\operatorname{Sup}^2|Q_0| + \operatorname{Sup}^2|Q_1| + \operatorname{Sup}^2|Q_2|} \text{ (Cauchy-Schwartz)} \\ &\leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

3.3. Avec $\langle P, Q\rangle = \int_{0}^{+\infty} PQ(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Calculer $\langle X^p, X^q\rangle$.
   Réponse : $(p+q)!$.
2. Orthonormaliser $1, X, X^2$.
   Réponse : $1, X-1, \frac{1}{2}(X^2-4X+2)$.

4. Espaces de fonctions

4.1. Dans $\mathcal{C}([0,1] \to \mathbb{R})$ avec le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
   C'est Cauchy-Schwartz pour une généralisation du produit scalaire introduit en tête de paragraphe : $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Dans $\mathcal{C}_1([0,1])$, on pose :
$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f'\,g' + f(0)\,g(1) + f(1)\,g(0).$$
   Montrer que φ définit un produit scalaire.
   Réponse : la positivité est subtile, on a $\int (f')^2 \geqslant (\int f')^2$ par Cauchy-Schwartz, d'où, immédiatement :
$$\varphi(f, f) \geqslant f(0)^2 + f(1)^2.$$
   Que φ soit définie est ensuite immédiat.

5. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La transposée d'une matrice A est notée, au choix, ${}^tA$, A^T ou t_A...
On note I pour I_n.

5.1. Avec $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(t_A \times B)$

1. Vérifier que c'est un produit scalaire.
   Réponse : on peut démontrer que $\mathrm{tr}(t_A \times A) = \sum_{i,j} (a_{i,j})^2$.
2. On demande d'orthonormaliser les deux (matrices vues comme des) vecteurs $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Réponse : On trouve $B \perp A$ donc reste à calculer $C' = \dfrac{1}{\dots}\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$.
3. On demande d'orthonormaliser les deux (matrices vues comme des) vecteurs $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Réponse : on trouve : $B' = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} 22 & 9 & 0 \\ 29 & -42 & 35 \\ 10 & 9 & -16 \end{pmatrix}$.
4. Projeté sur $F = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ muni de $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(t_A \times B)$.
5. Montrer que $\mathrm{tr}(A\,B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$ par un calcul de double sommation. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
6. Montrer que $|\mathrm{tr}\, M| \leqslant \sqrt{n} \times \sqrt{\sum_{i,j} (a_{i,j})^2}$
   L'inégalité précédente dit juste que $|\langle M, I\rangle| \leqslant \|M\| \times \|I\|$: c'est Cauchy-Schwartz.
7. On note $F = \mathrm{Vect}(I)$.
   a. Déterminer $F^\perp$.
      Réponse : $F^\perp$ est logiquement le sous-espace des matrices de trace nulle :
      $$F^\perp = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}).$$
      (Puisque F est de dimension 1, l'inclusion $F^\perp \supset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est aisée.)
   b. Déterminer le projeté orthogonal d'une matrice M, sur F, puis sur $F^\perp$.
      $p_F(M) = \dfrac{\mathrm{tr}(M)}{n} I$ et $p_{F^\perp}(M) = M - \dfrac{\mathrm{tr}(M)}{n} I$.

6. Divers en espace Euclidien

6.1. Divers

1. Montrer que la boule unité est strictement convexe :
   $$\begin{cases} \|x\| < 1 \\ \|y\| < 1 \end{cases} \Rightarrow \forall t \in]0,1[, \|(1-t)\,y + t\,x\| < 1.$$
   C'est l'inégalité triangulaire...
2. Dans E euclidien, montrer que pour tous x, y on a :
   $$2 + \|x+y\|^2 \leqslant 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2).$$
   Réponse : On développe droite moins gauche, cela donne $2\,\|x\|^2\,\|y\|^2 + \|x-y\|^2$.

6.2. Utilisation d'un trinôme du second degré

1. Cauchy-Schwartz

Dans E euclidien, montrer que pour tout couple de vecteurs (u,v) on a :

$$\langle u,v\rangle \leqslant \|u\| \times \|v\|.$$

Réponse : pour tout $\lambda \geqslant 0$ on a $\|u+\lambda\, v\|^2 \geqslant 0$ donc $\lambda^2\,\|v\|^2 + 2\lambda\,\langle u,v\rangle + \|u\|^2 \geqslant 0$ donc le discriminant réduit est nul.

2. Dans E euclidien, on dispose de deux vecteurs u, v tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|u+\lambda\, v\| \geqslant \|u\|.$$

   a. Dessiner deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ vérifiant cela et deux vecteurs ne vérifiant pas cela.

   b. Montrer que $u \perp v$.

   Réponse : la différence des carrés donne $\lambda^2\,\|v\|^2 + 2\lambda\,\langle u,v\rangle$, ceci est censé rester toujours positif donc par propriété d'un trinôme du second degré dans $\mathbb{R}$ (prendre $\lambda \to 0$), forcément $\langle u,v\rangle = 0$.

3. Soit p un projecteur, montrer l'équivalence entre :

   - pour tout $\in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$;
   - p est orthogonal.

   Réponse :
   $\Leftarrow$ Pythagore.
   $\Rightarrow$ si $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$ alors écrivons que pour tout réel t :

$$\|x+t\,y\| \geqslant \|x\|.$$

   On en déduit que $\|y\|^2\,t^2 + 2\langle x,y\rangle\,t$ est toujours positif, et donc par second degré, $\langle x,y\rangle = 0$ ce qui prouve que $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$.

4. Soit p un projecteur tel que $\forall x \in E$:

$$\langle p(x), x\rangle \geqslant 0.$$

   Montrer que p est orthogonal.
   Réponse : Soient $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$ alors écrivons que pour tout réel t :

$$\begin{aligned} & \langle p(x+t\,y), x+t\,y\rangle \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & \langle t\,y, x+t\,y\rangle \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & t\,\langle x,y\rangle + t^2\,\|y\|^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

   ceci étant vrai pour tout réel t, forcément $\langle x,y\rangle = 0$.

7. Def d'un produit scalaire à partir d'une norme

1. Soit E de dimension finie, muni d'une norme $\|.\|$ vérifiant :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

   Montrer que $f(x,y) = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ définit un produit scalaire.
   Indications :

   a. Calculer $f(u,w) + f(v,w)$.

   b. Calculer $f(x+z,y) + f(x-z,y)$.

   c. Calculer $f(2x,y)$ puis $f(n\,x,y)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

   d. Calculer $f(r\,x,y)$ avec $r \in \mathbb{Q}$.

   e. Calculer $f(\lambda\,x,y)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.