E.V.

Table des matières

1. Espaces vectoriels ou pas ?

Dire si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. $\{f \in \mathcal{C} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(0) = 1\}$
2. $\{f \in \mathcal{C} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(1) = 0\}$
3. $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \lim (u) = 1\}$
4. $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \lim (u) = 0\}$
5. L'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
6. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. Coordonnées dans des bases données

1. Montrer que $A = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ avec $a_1 = (1, -1, \mathrm{i})$, $a_2 = (-1, \mathrm{i}, 1)$, $a_3 = (\mathrm{i}, 1, -1)$. Trouver les coordonnées dans cette base de $u = (1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}, \mathrm{i})$.
   Réponse : on trouve $u = \dfrac{1}{2}((1 - \mathrm{i})a_2 + (1 - 3\mathrm{i})a_3)$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, discuter des valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour lesquelles A est une base de $\mathbb{R}^3$. Coordonnées de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

   Réponse : c'est une base pour $t \neq \pm 1$. Et pour u, on trouve $u \begin{pmatrix} \frac{1}{t+1} - m \\ m \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}$; on vérifie que :

   - u est non défini pour $t = -1$ (u n'est pas dans $\langle A \rangle$) ;
   - u est défini, et valable, pour $t = 1$ (pour $t = 1$ en effet, $\langle A \rangle \subsetneq \mathbb{R}^3$ certes, mais il se trouve que $u \in \langle A \rangle$).

3. Dans $\mathbb{R}^3$, dire si les familles suivantes sont des bases ou pas, et si oui donner les coordonnées de $v = (a, b, c)$ dans chacune d'entre elles :

   a. $m = (2, 1, 1)$, $n = (5, 4, 3)$, $p = (17, 6, 8)$

   b. $m = (2, 1, 1)$, $n = (1, 3, 1)$, $p = (-2, 1, 3)$
   Réponse :

   c. $m = (1, 0, 3)$, $n = (0, 1, 2)$, $p = (2, -3, 0)$

3. Calculs divers

3.1. Calculs de rangs

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose :
   $f_1 = (1, 2, 3, 4)$, $f_2 = (1, 1, 1, 3)$, $f_3 = (2, 1, 1, 1)$, $g_1 = (-1, 0, -1, 2)$, $g_2 = (2, 3, 0, 1)$.
   On note $F = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ et $G = \langle g_1, g_2 \rangle$. Calculer les dimensions de $F, G, F + G, F \cap G$.
   Réponse :

   - $\dim G = 2$ assez évident ;
   - $\dim F = 3$ par un petit calcul de liberté ;
   - $\dim(F + G) \geqslant \dim F$ et on vérifie que $g_1 \notin F$ donc $\dim(F + G) = 4$ (donc $F + G = \mathbb{R}^4$) ;
   - on en déduit que $\dim F \cap G = 1$.

2. Dans $\mathcal{C}:]-1; 1[\to \mathbb{R}$, on considère :

   - $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
   - $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
   - $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   - $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Trouver le rang de (f_1, f_2, f_3, f_4).
   Réponse : on multiplie en haut et en bas dans f_1 et f_2 par le conjugué du bas, on obtient : $f_1 = f_3 + f_4$ et $f_2 = f_3 - f_4$ et comme (f_3, f_4) est libre, le rang est 2.

3. Calculer en fonction de a, b le rang de la famille $P_1(X) = X^2 - a$, $P_2(X) = X^2 - b\,X$, $P_3(X) = X^2 - a\,X + b$.
   Réponse : On calcule $\det \begin{pmatrix} -a & 0 & b \\ 0 & -b & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a\,b - a^2 + b^2$, pour $b \neq 0$ on pose $x = \dfrac{a}{b}$ et l'on trouve au final que la famille est liée <u>ssi</u> $a = b = 0$ (rang 1) ou $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (rang 2).

4. Rang de la famille (a, b, c, d, e) avec $a = (3, 2, 1, 0)$, $b = (2, 3, 4, 5)$, $c = (0, 1, 2, 3)$, $d = (1, -2, 1, 2)$, $e = (0, -1, 2, 1)$.
   Réponse : rang 4.

5. Rang dans $\mathbb{R}^4$ de $a = (2, -1, 3, 1)$, $b = (1, 1, 1, 1)$, $c = (4, 1, 5, 3)$, $d = (1, -2, 2, 0)$.

Réponse : on trouve $d=a-b$.

3.2. Calculs divers

1. Montrer que les plans $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $\left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$ sont égaux dans $\mathbb{R}^3$.

   Réponse : on peut exprimer les deux derniers comme combinaisons linéaires des deux premiers, ou bien voir que $a\wedge b=c\wedge d$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $E\colon x+y-2z+t=0$ et $F\colon \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z+t=0. \end{cases}$

   Donner une base de E, de F, de $E\cap F$.

   - E est un hyperplan donc dim E = 3 et je choisis $z=0$, j'ai alors une base de E : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$;
   -

3. Montrer que $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ est libre sur $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}-$ev.

   Réponse : écrire $\left(\lambda_1+\lambda_2\sqrt{2}\right)^2=3\lambda_3$ et on a tout de suite $\lambda_1\times\lambda_2=0$.

3.3. Intersections, sommes directes, supplémentaires

1. Dans $E=\mathbb{R}^3$, soient $E_1=\text{vect}(u, v)$ et $E_2=\text{vect}(w)$ avec $u=(0, 4, -1)$, $v=(3, -2, 5)$, $w=(2,0,3)$. La somme E_1+E_2 est-elle directe ?

   Réponse : oui, les trois vecteurs forment une famille libre...

2. Soient E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{vect}((0,4,-1),(3,-2,5)) \\ E_2 &= \{(x,y,z)\,/\,x+2z=0\}. \end{aligned}$$

   La somme E_1+E_2 est-elle directe ?

3. On considère les vecteurs $v_1=(1,0,0,1)$, $v_2=(0,0,1,0)$, $v_3=(0,1,0,0)$, $v_4=(0,0,0,1)$, $v_5=(0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Les espaces suivants sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$:

   a. $\text{vect}(v_1, v_2)$ et $\text{vect}(v_3)$?

   b. $\text{vect}(v_1, v_2)$ et $\text{vect}(v_4, v_5)$?

   c. $\text{vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{vect}(v_2, v_5)$?

   d. $\text{vect}(v_1, v_4)$ et $\text{vect}(v_3, v_5)$?

   Réponses : a) non b) oui c) non d) non.

4. Espace des fonctions réelles

4.1. Familles libres de fonctions

1. Dans $\mathcal{C}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, montrer que $\{x\to e^{nx}, n\in\mathbb{N}\}$ est libre.

   Réponse : regarder $\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda_0+\lambda_1 e^x+\ldots+\lambda_n e^{nx})$.

2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n réels distincts. On pose $f_k(x)=\dfrac{1}{x-x_k}$. a) La famille $(f_k)_k$ est-elle libre ?

   b) Même question en adjoignant à la famille la fonction $f(x)=\dfrac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)}$.

   Réponse : a) on multiplie par $(x-x_k)$ et on fait $x=x_k$.

   b) non d'après la théorie des éléments simples.

3. Montrer que la famille $(x\to|x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

4. Montrer que la famille $(x \to \sin(k\,x))_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.
   Réponse : par récurrence, on écrit une combinaison linéaire nulle pour tout x et on la dérive deux fois, on obtient donc :
$$\lambda_1 \sin(x) + \lambda_3 \sin(3x) \ldots + \lambda_n \sin(n\,x) = 0 \quad (1)$$
$$\lambda_1 \sin(x) + \lambda_3 \times 3^2 \sin(3x) \ldots + \lambda_n \times n^2 \sin(n\,x) = 0 \quad (2)$$
   on fait $(2) - (1) \times n^2$ on obtient une conbinaison nulle pour $n-1$ éléments.

4.2. Divers

1. Montrer que $P \oplus I = E$ où E est l'espace des fonctions réelles, et P, I les espaces respectifs des fonctions paires et impaires. (Indication : calculer $\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x$).
2. On donne (E): $y'' - 2y' = x^3 + y$ (*l'expression des solutions est donnée car l'étudiant ne les connaît pas par cœur apparemment*). Montrer que l'ensemble des solutions est un espace affine, donner une base de sa direction et trouver les coordonnées de la solution vérifiant les conditions initiales $\left\{\begin{smallmatrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{smallmatrix}\right.$
3. Dans $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ on pose $F = \{f \in E, f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et $G = \mathrm{vect}(\cos, \sin)$.
   Montrer que $F \oplus G = E$.
   Réponse pour $F + G = E$:
   Soit $f \in E$, on pose :
   - $\mu = \dfrac{f(0) + f(\pi)}{2}$ et $\lambda = \dfrac{f(0) - f(\pi)}{2}$ et $\eta = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$,
   - puis $g(x) = \lambda \cos x + \eta \sin x$,

   alors $f - g$ est dans F.

5. Espace des polynômes

5.1. Familles échelonnées

On appelle *degré* d'un polynôme le plus grand exposant non nul, et *valuation* le plus petit exposant non nul. Exemple, si $P(X) = X^3 + 2X^4 - X^5$, son degré est 5 tandis que sa valuation est 3.

1. Montrer qu'une famille polynômes de degrés échelonnés est libre.
2. Montrer qu'une famille polynômes de valuations échelonnées est libre.

5.2. Exercices divers

1. On considère $\{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = P(2) = 0\}$. On demande la dimension et une base.
2. On est dans $E = \mathbb{R}_6[X]$. On note $A = X^2\,\mathbb{R}_2[X] + 1$ et $B = \mathbb{R}'_6[X] + X^3$ deux sous-espaces affines de E, où $\mathbb{R}'_n[X]$ désigne l'espace des polynômes pairs (au sens des fonctions paires) de degré n. Déterminer $A \cap B$. Déterminer $A + B$. La formule $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$ fonctionne-t-elle dans ce cas (bien que les espaces soient affines et non vectoriels) ?
   Réponse :
   - $A = \{1 + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4\}$ et $B = \{b_0 + b_2 X^2 + X^3 + b_4 X^4 + b_6 X^6\}$;
   - donc :
   $$\mathrm{A} \cap B = \{1 + X^3 + \alpha_2 X^2 + \alpha_4 X^4\},$$
   qu'on peut aussi écrire :
   $$A \cap B = 1 + X^3 + X^2\,\mathbb{R}'_4[X];$$
   - de même :
   $$A + B = \{\beta_0 + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \beta_4 X^4 + \beta_6 X^6\} ;$$

- on trouve $\dim(A+B)=5$, $\dim(A)=3$, $\dim(B)=4$, $\dim(A\cap B)=2$.

5.3. Bases de $\mathbb{R}_n[X]$

Soient U,V,W les familles de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ suivantes :

nom	écriture avec pointillés	écriture générale
U	$(1,X,X^2,\dots,X^n)$	$(X^k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$
V	$(1,1-X,X-X^2,\dots,X^{n-1}-X^n)$	$\{1\}\cup(X^{k-1}-X^k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$
W	$(1,1+X,1+X+X^2,\dots 1+X+X^2+\dots+X^n)$	$(\sum_{i=0}^k X^i)_{k\in\{0,\dots,n\}}$
Z	$((1-X)^n,X(1-X)^{n-1},\dots,X^{n-1}(1-X),X^n)$	$(X^k(1-X)^{n-k})_{k\in\{1,\dots,n\}}$
T	$(1+X^n,X+X^n,X^2+X^n,\dots,X^{n-1}+X^n,X^n)$	$(X^k+X^n)_{k\in\{0,\dots,n\}}$

Montrer que ces familles sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$, et trouver les coordonnées de $F(X)=X-X^2+8X^3$ dans chacune de ces bases.

Réponse : Pour les bases, juste voir qu'elles sont de degrés échelonnés (pour U,V,W) ou de valuations échelonnées (pour Z). Pour les coefficients, on trouve :

- dans la base U, on a $F(0;1;-1;8)$ évidemment...
- dans la base V, on a $F(8;-8;-7;-8)$;
- dans la base W, on a $F(-3;4;-9;8)$.
- dans la base Z, on a $F(0;1;-1;8)$ car le système est triangulaire.
- dans la base T, on a $F(0;1;-1;8)$ car le système est triangulaire aussi.

6. Espace des suites réelles

1. On note U l'ensemble des suites réelles vérifiant :
$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n.$$
Déterminer une base $\mathcal{B}=\{(\alpha^n)_n,(n\,\beta^n)_n\}$ de U.
Trouver les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de la suite $u\in U$ vérifiant $u_0=u_1=1$.
Réponse :
   - $\alpha=\beta=1$ et la base est formée des deux suites $a_n=C^{\text{ste}}=1$ et $b_n=n$;
   - dans ce cas, $u=a$;
   - pour montrer que $\mathcal{B}$ est libre, il suffit de prendre $\mu\,a+\lambda\,b$ et de regarder la limite de cette suite ;
   - pour montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice, raisonner par dimension ou par système.
2. On note U l'ensemble des suites réelles vérifiant :
$$u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n.$$
Déterminer une base $\mathcal{B}=\{(\alpha^n)_n,(\beta^n)_n\}$ de U.
Trouver les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de la suite $u\in U$ vérifiant $u_0=u_1=1$.

7. Bases et dimensions

7.1. Calcul de dimensions

1. Soient U_2 et H_2 deux sous-espaces de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: le premier contient les matrices de rang 1, et l'autre les homothéties. Donner leur dimension.
Réponse :
   - $\dim(U_2)=3$ (choisir un $u\in U_2$ revient à choisir un $x\in\mathbb{R}^2$ et un $\lambda\in\mathbb{R}$, ou, autrement dit, à choisir trois coefficients) ;

- $\dim(H_2)=1$ (choisir un $h\in H_2$ revient à choisir un $\lambda\in\mathbb{R}$).

7.2. Divers

1. Montrer que $\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)$ en utilisant le théorème de la base incomplète.
   Réponse : soit A une base de $U\cap V$, on la complète en $A\cup A_U$ une base de U et en $A\cup A_V$ une base de V. Alors $A_U\subset U\backslash V$ et $A_V\subset V\backslash U$. De plus $A\cup A_U\cup A_V$ est libre (car $U\backslash V, V\backslash U, U\cap V$ sont disjoints). Donc $A\cup A_U\cup A_V$ est une base de $U\cup V$ d'où le résultat en comptant le nombre d'éléments de A, A_U, A_V.

2. Généralisation de $\dim(U+V)$.
   U, V, W sont des sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie.
   a. Montrer que $U\cap W+V\cap W\subset(U+V)\cap W$.
      Image : prendre W le sol, U une tige et V une racine...
   b. Montrer que $\dim(U+V+W)\leqslant\dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)-\dim(U\cap W)-\dim(V\cap W)+\dim(U\cap V\cap W)$.
   c. Examiner enfin le cas où U, V, W sont trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$.

7.3. Hyperplans

1. Dans un espace de dimension n, montrer que l'intersection de $n-1$ hyperplans est non réduite à $\{0\}$ (c'est-à-dire de dimension $\geqslant 1$).
   Réponse
   Par récurrence sur n :
   - pour $n=3$ ça marche avec la formule $\dim(A+B)$;
   - sinon on se place dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et on écrit $\bigcap_{k=1}^{n} H_k = H_n\cap(\bigcap_{k=1}^{n-1} H_k)$ et la formule des dimensions nous donne :
   $$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{n} H_k\right) = n+\dim\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} H_k\right)-\dim\left(H_n+\bigcap_{k=1}^{n-1} H_k\right);$$
   - on écrit $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} H_k=(H_1\cap H_{n-1})\cap\ldots\cap(H_{n-2}\cap H_{n-1})$ intersection de $n-2$ hyperplans de $\mathbb{R}^n$ donc de dimension $\geqslant 1$

2. Dans E de dimension n, on considère : H un hyperplan et $F\not\subset H$ un sous espace. Montrer que $\dim(F\cap H)=\dim(F)-1$.
   Réponse : $\dim(F\cap H)=\dim(F)+\dim(H)-\underbrace{\dim(F+H)}_{n}=\dim(F)-1$.

8. Espaces affines

1. On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$. On note $\mathcal{P}=\{P\in\mathbb{R}_n[X]\,/\,P(0)=2$ et $P'(0)=1\}$.
   Est-ce un espace affine ? Direction ? Dimension ?
   Réponse : $\mathcal{P}=\underbrace{X^2\,\mathbb{R}_{n-2}[X]}_{\text{direction}}+2+X$ de dimension $n-1$ (c'est un hyperplan affine).