Ev euclidiens

Table des matières

Dans toute cette page, E désigne un espace euclidien (i.e. muni d'un produit scalaire) et de dimension finie.

1. Caractérisation des endomorphismes orthogonaux

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et soit M la matrice de f dans une b.o.n.

Les propriétés suivantes sont équivalentes se résument par : « f orthogonal ».

1. (S) f conserve le produit scalaire $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$;
2. (I) f conserve la norme (i.e. f est une *isométrie*) $\langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle$;
3. (bon) f conserve les b.o.n. ;
4. (Cb) Les vecteurs-colonne de M, donc les $(C_1, C_2, ..., C_n)$, forment une b.o.n. ;
5. (Lb) Les vecteurs-ligne de M, donc les $(L_1, L_2, ..., L_n)$, forment une b.o.n ;
6. $M \times {}^tM = I$;
7. ${}^tM \times M = I$.

Démonstrations :

- $c \Rightarrow a$: $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle \sum u_i f(e_i), \sum v_j f(e_j) \rangle = \sum_{i,j} u_i v_j f(e_i) f(e_j) = \sum u_i v_j = \langle u, v \rangle$.
- $a \Rightarrow c$: si (e_i) est une b.o.n. alors $(f(e_i))$ aussi vu que $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$ qui vaut 1 ou 0 suivant si $i = j$ ou $i \neq j$.
- $c \Rightarrow d$ puisque les vecteurs-colonne de M sont les images par f des vecteurs de la base canonique.
- $g \Leftrightarrow d$ c'est la même chose dite différemment et $e \Leftrightarrow f$.

2. Démonstrations plus générales

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien, telle que f conserve l'orthogonalité :
$$\forall u, v \in E, u \perp v \Rightarrow f(u) \perp f(v).$$
   a. Calculer $\langle u + v, u - v \rangle$ pour u, v unitaires.
   b. Montrer qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in E$, $\|f(u)\| = \alpha \|u\|$.
   c. En déduire qu'il existe g orthogonale telle que $f = \alpha g$.
2. f, g deux rotations qui commutent, $\vec{u}$ unitaire sur l'axe de f,
   a. Montrer que $g(\vec{u})$ est égal à $\vec{u}$ ou à $-\vec{u}$.
      $g(\vec{u})$ est invariant par f donc colinéaire à $\vec{u}$ et de norme 1 donc égal à $\pm\vec{u}$.
   b. Si $g(\vec{u}) = \vec{u}$ montrer que f et g ont le même axe.
      $g(\vec{u}) = \vec{u}$ implique que $\vec{u}$ est sur l'axe de g.
   c. Si $g(\vec{u}) = -\vec{u}$, montrer que les axes de f et de g sont orthogonaux entre eux, puis que f et g sont des retournements.

Soit $\vec{v}$ unitaire sur l'axe de g. Alors, comme g conserve le produit scalaire on a $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = -\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$. Ensuite on a $g(\vec{u}) = -\vec{u}$ donc g est un retournement puis par un raisonnement symétrique sur f on aboutit à f retournement aussi.

d. Inversement, si f et g sont des rotations de même axe ou des retournements daxes orthogonaux, montrer que f et g commutent.

Réponse pour le second point, dans la base $(a_f,\ a_g,\ b)$ les matrices sont $F = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ et $G = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ qui commutent.

3. Dans $M_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$, vérifier que c'est un produit scalaire.
Soit $\Omega \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi: M \to \Omega\, M$, démontrer que φ orthogonale $\Leftrightarrow$ Ω orthogonale.
Réponse : φ orthogonale ssi pour tous M, N on a $\mathrm{tr}(M^T\,\Omega^T\,\Omega\, N) = \mathrm{tr}(M^T N)$ ceci peut être vu comme $\langle M, \Omega^T\,\Omega\, N\rangle = \langle M, N\rangle$ donc $\Omega^T\,\Omega\, N - N$ est orthogonal à tout donc est nul, et ce pour tout N, donc $\Omega^T\,\Omega = \mathrm{Id}$ et la réciproque est vraie.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est euclidien.
a) montrer que les propriétés suivantes ne sont pas équivalentes ;
b) montrer que deux des trois propriétés suivantes entraîne l'autre :
   a. f isométrie ;
   b. $f^2 = -\mathrm{Id}$;
   c. pour tout $x \in E$, on a $f(x) \perp x$.

Réponse :

- si $(1)\cap(2)$ alors : $\langle f(x), x\rangle = \langle f^2(x), f(x)\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$ d'où $\langle f(x), x\rangle = 0$;
- si $(2)\cap(3)$ alors : $\langle x + f(x),\ f(x) + f^2(x)\rangle = 0 \Rightarrow \|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ d'où f isométrie ;
- si $(3)\cap(1)$ alors : soit $y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\langle f^2(x) + x, f(y)\rangle &= \langle f^2(x), f(y)\rangle + \langle x, f(y)\rangle \\ &= \langle f(x), y\rangle + \langle x, f(y)\rangle,\end{aligned}$$

or $\langle f(x+y), x+y\rangle = \langle f(x), y\rangle + \langle x, f(y)\rangle = 0$ d'où, par surjectivité de f : $f^2 = -\mathrm{Id}$.

c) trouver un exemple d'endomorphisme qui vérifie ces trois propriétés.
Réponse : rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dans le plan ou toute matrice (d'ordre pair) par blocs du type :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & \ldots \end{pmatrix}.$$

5. u isométrie de E euclidien et $v = u - \mathrm{Id}$.
   a. Montrer que $\mathrm{Ker}\, v = (\mathrm{Im}\, v)^{\perp}$.
   b. On pose $u_n = \dfrac{1}{n}(\mathrm{Id} + u + u^2 + \cdots + u^{n-1})$ démontrer que pour tout $x \in E$, $u_n(x)$ converge et dire vers quoi.

Réponses :

a. Si $x \in \mathrm{Ker}\, v$, alors $u(x) = x$ et maintenant soit $y \in E$ calculons :

$$\begin{aligned}\langle x, v(y)\rangle &= \langle x, u(y)\rangle - \langle x, y\rangle \\ &= \langle x, u(y)\rangle - \langle u(x), u(y)\rangle \\ &= \langle x - u(x), u(y)\rangle \\ &= \langle v(x), u(y)\rangle \\ &= \langle 0, u(y)\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ensuite par le théorème du rang on a l'égalité.

b. On a $E = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} v$, alors soit $x \in E$, on écrit $x = k + i$, alors $u_n(x) = k + u_n(i)$ mais $i = v(z)$ donc quand on fait $(\mathrm{Id} + u + u^2 + \cdots + u^{n-1})(i)$ cela se télescope et il reste juste $i - u^n(z)$ d'où $u_n(x) = k + \dfrac{1}{n}(i - u^n(z))$, or, $u^n(z)$ est de norme constante d'où $u_n(x)$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker} v$.

Remarque : on a utilisé deux caractérisations différentes de l'isométrie :
- dans le (a), le fait que u conserve le produit scalaire ;
- dans le (b), le fait que u conserve la norme.

6. Si M est symétrique et vérifie $M^2 = I$, que dire de M ?
   réponse : on a $M t_M = I$ donc M orthogonale et symétrique $\Rightarrow$ M est la matrice d'une symétrie orthogonale.

7. Soit f un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire :

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$

a) Montrer qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$.
   Réponse : supposer $\langle u - v, u + v \rangle = 0$.
   b) Conclure qu'il existe g orthogonal tel que $f = \alpha g$.
   Réponse : $x \mapsto \dfrac{f(x)}{\alpha}$ conserve la norme donc est orthogonal.