Valeurs propres et diagonalisation

1. Exercices où $f\circ f$ est particulier

1.1. $f\circ f = f$

1. On pose $A(X)=X^2-32\,X+7$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ est définie par :
   $f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par A.
   Montrer que f est bien linéaire, que $f^2=f$ et en déduire la diagonalisation de f.
   $f(P)$ est toujours de degré $\leqslant 1$ donc $f(f(P))$ est toujours égal à $f(P)$. De $f^2=f$ on tire que $X\,(X-1)$ annule f donc f diagonalisable. Ker f c'est trivialement $A\,\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\mathrm{Ker}(f-I)$ c'est $R_1[X]$, ensuite on applique le lemme des noyaux : $\Delta=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ et P formée des vecteurs $A, A\,X, \ldots, A\,X^{n-2}, X, 1$.

1.2. $f\circ f = \mathrm{Id}$

1. On pose $\Phi\colon\begin{cases}\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]\\ P(X)\to X^n\,P\left(\frac{1}{X}\right)\end{cases}$. Montrer que Φ est linéaire et diagonalisable.
   On peut aussi montrer que
   Si l'on sait que Φ symétrique $\Rightarrow$ Φ diago c'est évident car :

$$M_\Phi=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

   On peut dire aussi que $\Phi\circ\Phi=\mathrm{Id}$ donc X^2-1 annule Φ. On cherche alors les vecteurs propres, on trouve :

   - Si $n=2k-1$:
     - $\Phi(P)=P \Leftrightarrow P(X)=a_0(1+X^n)+a_1(X+X^{n-1})+\cdots+a_{k-1}(X^{k-1}+X^k)$ soit $\dim\mathrm{Ker}(\Phi-I)=k$;
     - $\Phi(P)=-P \Leftrightarrow P(X)=a_0(1-X^n)+a_1(X-X^{n-1})+\cdots+a_{k-1}(X^{k-1}-X^k)$ soit $\dim\mathrm{Ker}(\Phi+I)=k$;
     - la somme des dimensions de $\mathrm{Ker}(\Phi-I)$ et de $\mathrm{Ker}(\Phi+I)$ est $\dim\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est diagonalisable.
   - Si $n=2k$, :
     - $\Phi(P)=P \Leftrightarrow P(X)=a_0(1+X^n)+a_1(X+X^{n-1})+\cdots+a_{k-1}(X^{k-1}+X^{k+1})+a_kX^k$ soit $\dim\mathrm{Ker}(\Phi-I)=k+1$;
     - $\Phi(P)=-P \Leftrightarrow P(X)=a_0(1-X^n)+a_1(X-X^{n-1})+\cdots+a_{k-1}(X^{k-1}-X^k)$ soit $\dim\mathrm{Ker}(\Phi+I)=k$;
     - la somme des dimensions de $\mathrm{Ker}(\Phi-I)$ et de $\mathrm{Ker}(\Phi+I)$ est $\dim\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est diagonalisable aussi.

2. Considérations autour de $f\circ g$ et $g\circ f$

1. $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,E)$ avec $\dim E=n$ et $\dim F=p$. Est-ce que $\mathrm{Sp}(f\circ g)=\mathrm{Sp}(g\circ f)$?
   Réponse : Les spectres sont les mêmes sauf que si $n>p$, alors 0 est valeur propre de $g\circ f$ mais pas forcément de $f\circ g$.
   Un exemple avec $n>p$ serait $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}$ et f et g respectivement la surjection et l'injection canoniques.

On peut profiter de cet exercice pour faire remarquer que si $n \neq p$:

- ça n'a pas de sens de parler des valeurs propres de f ;
- forcément $0 \in \mathrm{Sp}\, f \Rightarrow f$ non inversible ;
- mais on peut avoir $0 \notin \mathrm{Sp}\, f$ et f non inversible quand même, exemple en prenant l'injection canonique (g) ci-dessus.

2. $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$. On suppose que $f \circ g$ a n valeurs propres distinctes, montrer que $g \circ f$ est diagonalisable.
   $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles, et $0 \in \mathrm{Sp}(f \circ g) \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$. Donc $g \circ f$ a aussi n valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.
   Remarque on peut aussi utiliser $\chi_{f \circ g} = \chi_{g \circ f}$ qui se démontre avec f inversible puis par densité de $\mathcal{GL}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

3. Divers

1. φ: $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto (X^2-1)\, P''(X) + (2X+1)\, P'(X) \end{cases}$ est-elle diago ?
   Réponse :
   $$M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & & & \\ & 2 & 2 & & & \\ & & 2+2^2 & & & \\ & & & \ddots & n-n^2 & \\ & & & & \ddots & n \\ & & & & & n+n^2 \end{pmatrix},$$
   donc φ diago.

2. Résoudre $M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{C})$.
   Réponse : $M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -5 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 5 & 1 & \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on résoud $\Delta^3 = D$, avec Δ et D qui commutent donc simultanément diagonalisables, et au final on trouve :
   $$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 \sqrt{3} & & \\ -5\varepsilon_3\sqrt{3} + 5\varepsilon_2\sqrt{2} & \varepsilon_2\sqrt{2} & \\ 2\varepsilon_3\sqrt{3} - 2\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

3. $A = \left(\dfrac{i}{j}\right)_{i,j}$ est-elle diagonalisable ?
   Réponse : $\mathrm{rg}\, A = 1$ et $\mathrm{tr}\, A = n$ donc $A \sim \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n \end{pmatrix}$.

4. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifie M^2 diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.
   Réponse : Il y a un $\Pi(X - \lambda_i)$ qui annule M. Si l'on choisit μ_k tel que $(\mu_k)^2 = \lambda_k$, alors on a un $\Pi(X - \mu_i)(X + \mu_i)$ qui est donc scindé et qui annule M donc M diagonalisable.
   Remarque : si l'on pouvait avoir $\lambda_i = 0$ ça ne marcherait pas.

5. $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? (discuter suivant $z \in \mathbb{C}$).
   Réponse : On trouve déjà $\mathrm{X}_n(X) = X^3 + z\,X + z^2 + z$ ou $-X^3 +$

6. $A = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_{n-1} & & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$. Donner une CNS sur $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
   Réponse : les (e_i, e_{n-i}) sont stables par A et A y a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ a_{n-i} & 0 \end{pmatrix}$ donc A est diagonalisable <u>ssi</u> les (a_i, a_{n-i}) sont toujours tous deux simultanément soit nuls soit non nuls, c'est-à-dire si la matrice a une certaine « symétrie » relative aux zéros.

7. On donne $b \in \mathbb{C}$, $P = \mathbb{C}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ avec $f \neq b\,I$.
   On suppose que $(f - b\,I)^3 = 0$.
   a. montrer que f n'est pas diagonalisable ;
   b. montrer que $P(f)$ inversible $\Leftrightarrow$ $P(b)$ non nul.

   a. évident, et b. : si λ est valeur propre associée à x alors $(\lambda - b)^3 = 0$ donc $\lambda = b$. Ainsi, b est la seule valeur propre. On peut trigonaliser et c'est trivial car il n'y aura que des $P(b)$ sur la diagonale.

8. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I$ et $(I, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ libre. Montrer que $\operatorname{tr} A = 0$.
   Réponse : $X^n - 1$ annule A (donc A diago) ce qui ne veut pas dire que $X^n - 1$ est le polynôme minimal, mais le terme en X^{n-1} de $\chi_A(X)$ est toujours $\operatorname{tr} A$.
   On écrit alors comme toujours : $\chi_A(A) = 0 = A^n + \operatorname{tr} A \times A^{n-1} + a_{n-1}\,A^{n-2} + \cdots + a_1\,A + a_0\,I$.
   Or, $A^n = I$ donc la liberté permet de conclure à la nullité des coefficients dont $\operatorname{tr} A$.