Applications linéaires

Table des matières

1. Ker, Im, $\oplus$, rangs

1. Divers

1. Montrer que $u(\operatorname{Ker}(v\,u)) = \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u$.
2. $u, v \in \mathcal{L}(X)$, on suppose que $\begin{cases} u\,v\,u = u & (1) \\ v\,u\,v = v. & (2) \end{cases}$ Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$.

   $\cap$ évidente avec (1), pour + on fait $x = x - v\,u(x) + v\,u(x)$ et on utilise (2).
3. On suppose que $u\,v = w$, $v\,w = u$, $w\,u = v$:

   a. Montrer que u, v, w ont même noyau, même image.

   Partir de l'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v\,u$ et faire tourner. Recommencer avec $\operatorname{Im} f\,g \subset \operatorname{Im} f$

   b. Montrer que $u^2 = v^2 = w^2$.

   Elles sont toutes égales à $w\,v\,u$ (rappel : $(w\,v)u = w\,(v\,u)$).

   c. Montrer que u, v, w vérifient l'équation $f^5 = f$.

Remplacer et bidouiller...

d. Montrer que $E=\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$, et de même pour v, w.
Pour l'intersection, utiliser $u=u^5$ et pour la somme écrire $x=x-u^4(x)+u^4(x)$.

e. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est stable par u, v, w.
$\operatorname{Im} u$ stable par u évidemment, et vu que $\operatorname{Im} u=\operatorname{Im} v=\operatorname{Im} w$...

f. Montrer que sur $\operatorname{Im} u$, les endomorphismes u, v, w sont bijectifs.
Pour l'injectivité, utiliser $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u=\{0\}$ et pour la surjectivité, utiliser $u^5=u$.

4. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z+a\,\bar{z} \end{cases}$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ fixé.

a. f est-il un $\mathbb{R}$-morphisme ? un $\mathbb{C}$-morphisme ?

b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Réponses :

- f est un $\mathbb{R}-$morphisme (mais pas un $\mathbb{C}-$morphisme). On a donc $\dim E=\dim \mathbb{C}=2$.
- on trouve $z \in \ker f \Leftrightarrow \dfrac{z}{\bar{z}}=a$ donc :
- Si $|a| \neq 1$, alors $\operatorname{Ker} f=\{0\}$ donc $\operatorname{Im} f=\mathbb{C}$
(le système en (x, y) a pour déterminant $1-|a|^2$).
- Si $a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors $\operatorname{Ker} f=\operatorname{vect}(\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2})$;
- $\operatorname{Im} f=\operatorname{vect}(1+a)$, sauf si $a=-1$.

5. Montrer que $|\operatorname{rg} u-\operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)$.
Réponse :

- $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)$ évident car $\{u(x)+v(x), x \in E\} \subset \{u(x)+v(x'), x, x' \in E\}$;
- ensuite on applique ce qui précède à $u+v$ et $-v$ puis à $u+v$ et $-u$.

6. Soient $a, b \in E$, existe-t-il toujours une $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f(a)=b$?
Oui, considérer $E=\operatorname{vect}(a, b) \oplus G$ et prendre $f(a)=b$ et $f(b)$ quelconque et $f_{|G|}=\operatorname{Id}_G$.

2. Exercices où $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f=E$

1. Toute application linéaire f vérifie-t-elle l'égalité $E=\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?
Réponse : Non ! Prendre $P \mapsto P'$ ou bien prendre $f\colon (e_1, e_2) \mapsto (0, e_1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. $f \in \mathcal{L}(E)$ non inversible vérifie $(1) f^3-2a\, f^2+a^2 f=0$ pour un certain $a \in \mathbb{K}^*$. Montrer que $E=\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.
Réponse : soient $x=f(y)$ avec $f(x)=0$. Appliquons (1) à y : on trouve $x=0$. Le théorème du rang permet de conclure.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $E=\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

a. Montrer que $\operatorname{Ker}(f^2)=\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f^2)=\operatorname{Im}(f)$.

a. Soit $x \in \operatorname{Ker} f^2$ et $y=f(x)$ alors il existe une décomposition $y=k+i$ donc $f(y)=f(i)=f^2(z)=0$...
Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$ alors $y=f(z)$ écrivons $z=k+i$ alors $f(z)=f(i)=f(f(u))$.
On remarquera que les démos utilisent seulement $E=\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f$.

2. Autour de $u\,v$ et/ou $v\,u$

Soient u, v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ ou de E avec $\dim E=n$.
Trier les exercices qui nécessitent $\dim E=n$ et ceux qui ne le nécessitent pas.

1. .Montrer que si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda \in \operatorname{Sp}(u\,v) \Rightarrow \lambda \in \operatorname{Sp}(v\,u)$.

Réponse :

Soit un $x\neq 0$ tel que $u(v(x))=\lambda x$ (ce qui implique $v(x)\neq 0$), alors on a $v\circ u(v(x))=\lambda\, v(x)$.

2. Montrer que uv inversible implique vu inversible.

   Cet exercice est équivalent à :

   « Montrer que $0\in \mathrm{Sp}(u\,v)\Rightarrow 0\in \mathrm{Sp}(v\,u)$. »

   Il suffit de démontrer que uv inversible implique u et v inversibles (exercice suivant).

3. Montrer que uv inversible implique u et v inversibles.

   a. par la contraposée :

      si v non inversible alors $\exists x\neq 0/v(x)=0$ d'où $u\,v(x)=0$ d'où $u\,v$ non inversible.

      si v inversible mais u non inversible, alors $\exists x\neq 0/u(x)=0$ d'où $u\,v(v^{-1}(x))=0$ d'où $u\,v$ non inversible.

   b. par les Im et Ker :

      On a toujours $\mathrm{Ker}\, v\subset \mathrm{Ker}\, u\,v$ et $\mathrm{Im}\, u\,v\subset \mathrm{Im}\, u$ d'où $u\,v$ bijective implique :

      - v injective donc bijective ;
      - u surjective donc bijective.

4. **À propos de l'exercice 3b**

   Trouver un exemple concret de u,v dans un espace de dimension n vérifiant $\mathrm{Ker}\, v\subsetneq \mathrm{Ker}\, u\,v$ et $\mathrm{Im}\, u\,v\subsetneq \mathrm{Im}\, u$.

   Dans $\mathbb{R}_2[X]$, prendre $v\colon a\,X^2+b\,X+c\mapsto a\,X^2+c$ et $u\colon P\mapsto P'$.

5. On suppose que $u\circ v=v\circ u$, montrer que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont stables par v.

6. Montrer qu'on a toujours :

   - $\mathrm{Ker}\, v\subset \mathrm{Ker}\, u\,v$ et $\mathrm{Im}\, u\,v\subset \mathrm{Im}\, u$ (utile pour l'exercice 3b) ;
   - $\mathrm{Ker}\, u\,v=\mathrm{Ker}\, v\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, u\cap \mathrm{Im}\, v=\{0\}$;
   - $\mathrm{Im}\, u\,v=\mathrm{Im}\, u\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, u+\mathrm{Im}\, v=E$.

7. Parmi les 4 inclusions suivantes, l'une est toujours vraie, la montrer, et donner des contre exemples pour les autres :

   a. $\mathrm{Ker}(u\,v)\subset \mathrm{Ker}(u)$;

   b. $\mathrm{Ker}(u\,v)\subset \mathrm{Ker}(v)$;

   c. $\mathrm{Ker}(u)\subset \mathrm{Ker}(u\,v)$; non, prendre $v=0$

   d. $\mathrm{Ker}(v)\subset \mathrm{Ker}(u\,v)$ évidente.

8. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x\in E$, $f(x)$ et x sont colinéaires. Montrer que f est une homothétie, en déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$.

   Réponse : pour $(x,\,y)$ libre on a $f(x+y)=\lambda_{x+y}\,x+\lambda_{x+y}\,y=\lambda_x\,x+\lambda_y\,y$ d'où, par définition de la liberté, $\lambda_{x+y}=\lambda_x=\lambda_y$. Soit donc un $x_0\neq 0\in E$ fixé, alors pour tout $x\in E$, on a $f(x)=\lambda_{x_0}x$.

   Soit maintenant g telle que $\forall f\in\mathcal{L}(E)$, $f\,g=g\,f$, soient $x\in E$ et s la symétrie par rapport à $\mathrm{vect}(x)$, alors $s(g(x))=g(x)$ donc $g(x)$ colinéaire à x, ainsi g est une homothétie.

3. Nilpotents

1. Dans $\mathbb{R}^n$, on suppose $u^n=0$ et $u^{n-1}\neq 0$, montrer que $\exists x_0\in E/(x_0,u(x_0),\ldots,u^{n-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que cette famille est une base et écrire la matrice de u dans cette base. Rang de u^{n-1} ?

2. On suppose u nilpotent d'ordre p, montrer que $I-u$ est inversible et préciser son inverse.

Réponse : si $u^n = 0$, alors $(I - u)(I + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}) = I$.

4. Projecteurs

Note 1. $p^2 = p$ peut être représenté métaphoriquement par l'expression :
ce qui est tombé par terre ne tombera pas plus bas.

Note 2. Image d'un projecteur simple : l'ombre à midi d'un arbre qui penche. Ker = les arbres droits, Im = les arbres couchés. Seul le mort est égal à son ombre.

4.1. Généralités

1. Questions simples :
   a. Si p est un projecteur, pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}$ a-t-on $\lambda\, p$ projecteur ?
   b. Contre exemples
      f est-il nécessairement un projecteur, sachant que (les questions sont indépendantes) :
      i. $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$
      ii. f^2 est un projecteur.

      Chercher des $f(x) = \lambda x$
2. **Propriétés simples des projecteurs**
   a. Si p projecteur, montrer que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(I - p)$ et que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(I - p)$.
   b. Montrer que p projecteur $\Leftrightarrow$ $I - p$ projecteur.
3. **L'ensemble des projecteurs**
   a. L'ensemble des projecteurs de $\mathcal{L}(E)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?
      Non : on sait que $p^2 = p$ n'implique pas $(\lambda p)^2 = \lambda p$ (sauf $\lambda = 0$ ou 1).
   b. Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des projecteurs sur le plan $z = 0$ est-il stable par addition ?
      Réponse : si p et q sont deux tels projecteurs, $p\, q = q$ et $q\, p = p$ (puisque $p_{|\operatorname{Im} q} = \operatorname{Id}_{|\operatorname{Im} q}$). Donc on a vite fait de voir que $(p + q)^2 = 2(p + q)$.

4.2. Application tierce à partir de deux projecteurs

4.2.1. Divers

1. Produits de projecteurs :
   a. Si p et $p\,q$ sont des projecteurs, montrer que $p\,q\,p$ l'est aussi.
   b. Si p, q sont des projecteurs qui commutent, montrer que $p\,q$ est un projecteur, que $\operatorname{Im} p\,q = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ et que $\operatorname{Ker} p\,q = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.
   c. Si $p(x,\, y) = (x,\, 0)$ et $q(x,\, y) = (y,\, x)$ dans $\mathbb{R}^2$, montrer que p et $p\ q\ p$ sont des projecteurs, mais pas $p\,q$.
   d. Si $p(x,\, y) = (x,\, 0)$ et $q(x,\, y) = (0,\, x)$ dans $\mathbb{R}^2$, montrer que p et $p\ q\ p$ sont des projecteurs, mais pas $q\,p$.
   e. Si $p(x, y) = (y, x)$ et $q(x, y) = (0, x)$ dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $p\,q$ est un projecteur, mais ni p, ni q, ni $p\,q\,p$.

4.2.2. L'application $c = p\,q - q\,p$

Dans tout ce paragraphe, on considère p, q deux projecteurs, et l'on pose $c = p\,q - q\,p$.

1. Montrer que $p\,q$ projecteur <u>ssi</u> $c(\operatorname{Im} q) \subset \operatorname{Ker} p$.

Cela revient à montrer que $p\,q\,p\,q = p\,q \Leftrightarrow p\,c\,q = 0$ or $p\,c\,q = p\,q - (p\,q)^2$...
On supposera pour la suite que $p\,q$ est un projecteur.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(p\,q) = (\mathrm{Ker}\,p + \mathrm{Im}\,q) \cap \mathrm{Im}\,p$.
   Pour $\subset$ on peut écrire $p\,q(z) = p\,q(z) - q(z) + q(z)$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(p\,q) = q^{-1}(\mathrm{Ker}\,p)$.
   $x \in \mathrm{Ker}(p\,q) \Leftrightarrow q(x) \in \mathrm{Ker}\,p \Leftrightarrow x \in q^{-1}(\mathrm{Ker}\,p)$.

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(p\,q) = (\mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Im}\,q) \oplus \mathrm{Ker}\,q$.

4.2.3. L'application $r = p + q - p\,q$

Dans tout ce paragraphe, on considère p, q deux projecteurs, et l'on pose $r = p + q - p\,q$.

1. On suppose que $q\,p = 0$ (c'est-à-dire $\mathrm{Im}\,p \subset \mathrm{Ker}\,q$).

   a. Montrer que r est un projecteur et que $\mathrm{Ker}\,r = \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q$.
      Écrire $r(x) = 0$ et appliquer p ou q de chaque côté.

   b. Montrer que $\mathrm{Im}\,r = \mathrm{Im}\,p \oplus \mathrm{Im}\,q$.

4.3. Expressions analytiques ou numérique de projecteurs

4.3.1. Dans $\mathbb{R}^2$

1. Expression dans $\mathbb{R}^2$ du projecteur sur $D\colon x = y$ suivant $\vec{u}(a, b)$ avec $a \neq b$.
   Réponse : $p((x, y)) = (x, y) + \lambda_{x,y}\vec{u}$ donc on doit résoudre $x + \lambda\,a = y + \lambda\,b \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{y - x}{a - b}$ d'où finalement :
$$p((x, y)) = \left(x + \frac{y - x}{a - b}a, y + \frac{y - x}{a - b}b\right),$$
   soit une matrice :
$$M_p = \frac{1}{a - b}\begin{pmatrix} -b & a \\ -b & a \end{pmatrix},$$
   on vérifie que $M^2 = M$.

2. On pose $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^*$, puis, dans $\mathbb{R}^2$, on pose $D\colon y = a\,x$ et $\vec{u}\left(1, a + \dfrac{1}{k}\right)$. Déterminer l'expression du projecteur sur D parallèlement à $\vec{u}$.
   Réponse :
   $p(x, y) = (x, y) + \lambda\left(1, a + \dfrac{1}{k}\right)$ et $p(x, y) \in D$ d'où $y + \lambda\left(\cancel{a} + \dfrac{1}{k}\right) = a(x + \cancel{\lambda})$ d'où :
$$\lambda \;=\; k(a\,x - y),$$
   d'où ensuite :
$$\begin{aligned} p(x, y) &= (x, y) + k(a\,x - y)\left(1, a + \frac{1}{k}\right) \\ &= (x + k\,a\,x - k\,y, k\,a^2 x + a\,x - k\,a\,y). \end{aligned}$$
   Ainsi, le projecteur a pour matrice :
$$P = \begin{pmatrix} 1 + a\,k & -k \\ a(1 + a\,k) & -a\,k \end{pmatrix}.$$

4.3.2. Dans $\mathbb{R}^3$

1. Expression du projecteur sur $P\colon x + 2y + z = 0$ parallèlement à D portée par $\vec{u}(1; 1; 1)$.
   Réponse : on trouve
$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. **Généralisation de la question précédente**

Projecteur sur $P\colon a\,x+b\,y+c\,z=0$ parallèlement à $\vec{u}(u,v,w)$.
Réponse en posant $\vec{n}(a,b,c)$:

$$M=I_3-\frac{1}{\vec{n}\cdot\vec{u}}({}^t\vec{u}\,\vec{n}),$$

soit :

$$M=I_3-\frac{1}{a\,u+b\,v+c\,w}\begin{pmatrix} a\,u & b\,u & c\,u\\ a\,v & b\,v & c\,v\\ a\,w & b\,w & c\,w\end{pmatrix}.$$

4.3.3. Dans d'autres espaces

1. Dans $\mathbb{R}_5[X]$, on pose $F=\mathbb{R}_4[X]$ et $U=\langle X^5+X^2+X\rangle$ et on demande :
   a. le projeté de $P(X)=a\,X^5+b\,X^4+c\,X^3$ sur F parallèlement à U.
   b. le projeté de $P(X)=a\,X^5+b\,X^4+c\,X^3$ sur U parallèlement à F.
   Matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

5. Polynômes d'applications

5.1. Calculs naïfs

1. On suppose que $(u-I)^2=0$, déterminer u^{-1} et u^n s'ils existent.
   On passe par les suites arithmético-géométriques d'où $f^2-I=2(f-I)$ d'où :

$$f^n-I=2^{n-1}(f-I).$$

6. Applications dans $\mathbb{R}[X]$

6.0.1. Principe de factorisation

On sera amené à utiliser la propriété :

$$[P(\mu)=0\Rightarrow P \text{ se factorise par}(X-\mu)] \tag{1}$$

Elle se démontre :

- à l'aide de la division euclidienne en divisant $P(X)$ par $(X-\mu)$;
- ou en factorisant directement $P(X)$ par $(X-\mu)$ à l'aide de $a^n-b^n=(a-b)$.

6.0.2. $f_a\colon P\to(X^2-1)P'-a\,X\,P$

Dans $E=\mathbb{R}[X]$, on considère pour tout $a\in\mathbb{R}$ l'application $f_a\colon P\to(X^2-1)P'-a\,X\,P$.

1. Montrer que f_a est un morphisme.
2. f_1 et f_2 sont-elles injectives ? Et f_3 ? Et f_n ?

Réponses

Si le terme de plus haut degré de P est X^n, alors le terme de plus haut degré de $f_a(P)$ est $(n-a)X^n$ si toutefois $n-a$ n'est pas nul. Donc :

- si $a=1$ alors le seul candidat au noyau de f_a serait un $P(X)=m\,X+p$ mais on résoud et ça donne $m=p=0$: f_1 injective ;

- si $a=2$ alors de même le seul candidat serait de degré 2 et l'on résoud $f_a(m\,X^2+n\,X+p)=0$ on trouve $n=0$ et $m=p$ donc $\operatorname{Ker}(f_2)=\langle X^2+1\rangle$;
- on trouve de même f_3 injective.

Cas général :
Si $n\geqslant 3$ et $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k\,X^k$, alors P est dans le noyau <u>ssi</u> :

$$\begin{cases} a_1 & = & 0\\ a\,a_0+2\,a_2 & = & 0\\ (1-a)\,a_1 & = & 3\,a_3\\ (2-a)\,a_2 & = & 4\,a_4\\ \ldots & & \\ ((n-2)-a)\,a_{n-2} & = & n\,a_n\\ (n-1-a)\,a_{n-1} & = & 0\\ (n-a)\,a_n & = & 0 \end{cases}$$

Déjà, donc, $\boxed{\text{si } a\notin\mathbb{N},\ f_a \text{ est injective}}$ car de proche en proche tous les a_i sont nuls.

$\boxed{\text{Supposons donc que } a\in\mathbb{N} \text{ et } a\geqslant 3}$.
Pour traquer d'éventuels éléments de Ker f_a, il va donc falloir prendre $n=a$.
On prendra alors $a_n\neq 0$ mais $a_{n-1}=0$.

- Si a est pair avec $a=2p$, alors $\operatorname{Ker} f=\operatorname{vect}(P(X))$ avec pour $P(x)$ les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} &a_0=1\\ &a_2=-\frac{a}{2}\\ &a_4=\frac{a(a-2)}{4\times 2}\\ &a_6=-\frac{a(a-2)(a-4)}{6\times 4\times 2}\\ &\ldots\\ &a_{2p}=(-1)^p\frac{a(a-2)(a-4)\ldots(a-(2p-2))}{2p\times(2p-2)\times\ldots\times 6\times 4\times 2}. \end{aligned}$$

  Ainsi, $\boxed{a \text{ pair} \Rightarrow f_a \text{ non injective}}$

- Si a est impair par contre, vu que $a_{n-1}=0$, on aura les coefficients pairs nuls, et vu que $a_1=0$, les coefficients impairs seront nuls donc : $\boxed{a \text{ impair} \Rightarrow f_a \text{ injective}}$

6.0.3. Polynômes s'annulant quelque part

a,b,c trois réels distincts et E l'ensemble des polynomes P de degré 5 tels que :

$$P(a)=P(b)=P(c)=0.$$

Montrer que E est un espace vectoriel, et montrer, de plusieurs façons différentes, qu'il est de dimension 3 :

1. par le principe de factorisation (1) en considérant $\Phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_2[X]\longrightarrow E\\ P(X)\mapsto (X-a)(X-b)(X-c)P(X)\end{cases}$;
2. en considérant $\Psi\colon \begin{cases} E\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ P(X)\mapsto (P(a),P(b),P(c))\end{cases}$.

Réponse :
E est clairement un sous-espace de $\mathbb{R}_5[X]$ car la propriété est stable par combinaison linéaire.
Pour la dimension :

1. Tout $P\in E$ s'écrit $P(X)=(X-a)(X-b)(X-c)Q(X)$ avec $\partial^\circ Q=2$.
   Et $\operatorname{Ker}\Phi=0$ car on aurait un polynôme à une infinité de racines réelles.
2. $\operatorname{Ker}\Psi=E$ et on applique le théorème du rang.
   Pour prouver que Ψ est surjective utiliser les polynômes de Lagrange.

7. Spectre dans des espaces divers

7.1. Dans les espaces de fonctions

7.1.1. Opérateur $f \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

1. On pose $E = \mathcal{C}([0,1] \to \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. Soit :
$$\Phi\colon \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto F, \end{cases}$$
où F est définie par :
$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   a. Vérifier que $F \in E$, et que Φ est un morphisme.

   b. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Réponses : il faut résoudre $y = \frac{\lambda}{1-\lambda} x\, f'$ donc :

- tout $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$ est valeur propre associée à $x \mapsto x^p$ où $p = \frac{1}{\lambda} - 1$;
- $\lambda = 1$ est valeur propre associée à toute fonction constante ;
- $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.

7.2. Dans les espaces de suites

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ définie par $(f(u))_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + n\,u_n}{n^2}$, déterminer le spectre de f.

Réponse : en prenant une suite vérifiant $u_1 = \ldots = u_p = 0$ et $u_{p+1} \neq 0$, on peut construire un vecteur propre pour $\lambda = \frac{1}{n}$.

Inversement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, soit p le plus petit entier tel que $u_1 = \ldots = u_p = 0$ et $u_{p+1} \neq 0$, on a alors forcément $\lambda = \frac{1}{p}$.

Ainsi, $\mathrm{Sp}(f) = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.