Champs de vecteurs

Table des matières

1. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, div , Δ

1.1. Rappels de cours

Formules importantes :

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0}$

$\mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \Delta f$

$\mathrm{div}\, (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}) = 0.$

1.2. Exercices

1. Champs de gradient et de rotationnel :

   a. $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y^2\sqrt{z} \\ 2y\sqrt{z}\,(x+1) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{z}}\,(x\,y^2 + y^2) \end{pmatrix}$ est-il un champ de gradient ? Lequel ?

   Réponse : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{Y} = \vec{0}$ puis l'on trouve $\vec{Y} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, w$ avec $w(x, y, z) = (x+1)\, y^2\sqrt{z}$.

   b. $\vec{Z} = \begin{pmatrix} x\,z - x \\ -y\,z \\ z - x \end{pmatrix}$ est-il un champ de rotationnel ? Lequel ?

   Réponse : $\mathrm{div}\, \vec{Z} = 0$ puis l'on trouve $\vec{Z} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V}$ avec $\vec{V} = \begin{pmatrix} x\,y \\ x\,z \\ x\,y\,z \end{pmatrix}$.

   Pour ces deux voir fichier `champs_a_b` dans le dossier `scans`.

2. Circulations & Green Riemann

2.1. Rappels de cours

Circulation. $L = \displaystyle\int_C \vec{E}\, d\overrightarrow{M}$, où $C = \widehat{AB}$ est un chemin orienté et $\vec{E}$ un champ.

Usuellement, cela s'écrit $L = \displaystyle\int_C (E_x\, \mathrm{d}x + E_y\, \mathrm{d}y)$ où $M = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Champ de gradients. $\exists f \,/\, \vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ est équivalent à $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$. Dans la pratique donc, si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$, on résoud $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = E_x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = E_y. \end{cases}$

Circulation d'un champ de gradients. Si $\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ alors $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} \vec{E}\, d\overrightarrow{M} = f(B) - f(A)$.

Chemin C fermé. Deux cas :

1. si $\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ alors $\displaystyle\int_C \vec{E}\, d\overrightarrow{M} = 0$;
2. sinon (Green-Riemann) $\displaystyle\int_C \vec{E}\, d\overrightarrow{M} = \iint_D \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ où D est le domaine délimité par C. En dimension 3, cela donne $\displaystyle\int_C \vec{E}\, d\overrightarrow{M} = \iint_D (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

2.2. Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^2$, calculer de deux manières si possible :

   a. $I = \displaystyle\int_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}$ où C est le cercle de centre $A(2;1)$ et de rayon 2, orienté positivement et où $\vec{E} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$.

   Réponse : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$ donc $\vec{E}$ est un champ de gradient $\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$ et pour info on a $T = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^3}{3}$.

   première méthode : $I = 0$ puisque le circuit est fermé ;

   seconde méthode : il faut paramétrer la courbe par M: $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 1 + 2\sin\theta. \end{cases}$ On retrouve $I = 0$, voir dossier `scans` le fichier `1a`.

   b. $I = \displaystyle\int_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}$ où C est le demi-cercle $A \to B$ d'équation $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y \geqslant 1, \end{cases}$ avec $A(-1;1)$ et $B(1;1)$ et le champ $\vec{E} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$.

   Réponse : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} \neq \vec{0}$ donc $\vec{E}$ n'est pas un champ de gradients.
   Green Riemann ne s'applique pas puisque la courbe n'est pas fermée.
   Méthode directe : il faut paramétrer le demi-cercle par M: $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 1 + \sin\theta. \end{cases}$
   On trouve $I = \dfrac{10}{3} + \pi$, voir dossier `scans` le fichier `1b`.

   c. $I = \displaystyle\int_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}$ où C est l'ellipse d'équation $(x-2)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ et le champ $\vec{E} = \begin{pmatrix} x\,y \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Réponse : par Green-Riemann ou directement par paramétrage, on trouve $I = -4\pi$ voir dossier `scans` le fichier `1c`.

   d. $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ avec D le triangle $A(1;-1)$, $B(1;1)$, $C(-1;0)$ et $f(x,y) = x - y^2$ de deux façons.

   Réponse : directement on trouve $I = \dfrac{1}{3}$ et par Green-Riemann à l'envers on retrouve $\vec{E}\begin{pmatrix} y^3/3 \\ x^2/2 \end{pmatrix}$ et on a $I = I_{A\to B} + I_{B\to C} + I_{C\to A} = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ aussi. Voir dossier `scans` le fichier `1d`.

3. FLUX & OSTROGRADSKY

3.1. Rappels de cours

Flux. $\Phi = \displaystyle\iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ où $\vec{E}$ est un champ ambiant et $\mathrm{d}\vec{S}$ un vecteur normal élémentaire.

Dans la pratique on paramètre la surface par $M\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ et alors $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{N}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ avec $\vec{N} = \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}$. Une fois $\vec{N}$ déterminé, on regarde s'il correspond à l'orientation choisie et si ce n'est pas le cas on le remplace par $-\vec{N}$.

Champ de rotationnel. $\exists \vec{R} / \vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{R}$ est équivalent à $\mathrm{div}\, \vec{E} = 0$.

Flux d'un champ de rotationnel. Si $\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{R}$ alors $\displaystyle\iint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_C \vec{R}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}$: c'est Green-Riemann écrit différemment mais surtout généralisé à des surfaces pas forcément planes. Ça s'appelle Stockes.

Flux sortant par une surface fermée . Deux cas :

1. si $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ alors $\displaystyle\iint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$;
2. sinon $\displaystyle\iint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,\mathrm{d}V$: Ostrogradsky.

3.2. Exercices

1. Un bon exercice pédagogique pour introduire les flux est le suivant : Appliquer Ostrogradsky à $\vec{E}\begin{pmatrix} x\,y \\ y+1 \\ y^2 \end{pmatrix}$ à travers toutes les parois du cylindre $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$