# Suites

## Table des matières



## 1. Suites arithmétiques et géométriques

### 1.1. Arithmétiques

1. Compléter le tableau suivant, qui indique le comportement des suites arithmétiques suivant la valeur de leur raison $R$.

| | $R<0$ | $R=0$ | $0<R$ |
|---|---|---|---|
| $u_0\in\mathbb{R}$ | | | |

## 1.2. Géométriques

### 1.2.1. Rappels de cours

Compléter le tableau suivant, qui indique le comportement des suites géométriques suivant la valeur de leur raison $q$.

| | $q<-1$ | $q=-1$ | $-1<q<0$ | $q=0$ | $0<q<1$ | $q=1$ | $1<q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_0<0$ | | | | | | | |
| $u_0>0$ | | | | | | | |

### 1.2.2. Exercices

1. (sommation géométrique, trouver $n$) on place un grain de blé (1g) sur la première case, 2 sur la seconde etc. Au bout de combien de case le plateau de jeu surpassera-t-il le poids de la Terre ($6.10^{24}$kg) ? Y arrivera-t-on avec un échiquier ? Avec un damier ?
   - solution avec Giac :
2. (suite géométrique, trouver $n$) une feuille de papier d'épaisseur $0,1$mm. On la plie en deux, puis encore en 2 etc. Au bout de combien de pliages l'épaisseur atteindra-t-elle la distance Terre-Lune (1 seconde-lumière). [en pratique on peut plier 6 fois. Avec des ciseaux et de la patience peut être 10 ou 12 fois)
   - solution avec Python :
3. (suite géométrique, trouver $n$) AB = 10cm, on construit des demi cercles dont le rayon double à chaque demi-tour. Sur ce schéma, trois demi-tours ont été représentés. En combien de demi-tours atteint-on une distance de 1km ?

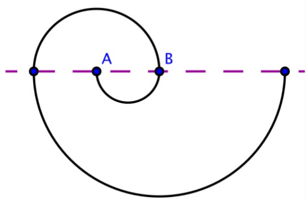


**Figure 1.**

- Solution avec R :
  On veut $0,1\times 2^n=10^3 \Leftrightarrow 2^n=10^4$. De tête environ $n=13$.

```
> 2^13
  [1] 8192
> 2^14
  [1] 16384
> d'où 13 demi tours et quelques...
```

## 1.3. Divers

1. Compléter le tableau suivant :

| | suite arithmétique<br>raison $R$<br>premier terme $u_0$ | suite géométrique<br>raison $q$<br>premier terme $u_0$ |
|---|---|---|
| relation de récurrence | | |
| terme général | | |

2. Petites questions :
   a. nature de $(u_n)$ définie par $u_n = 2n - 3$ ;
   b. nature de $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{3-5n}{7}$ ;
   c. $(u_n)$ définie par $u_n = 1 + n^2$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
   d. $(u_n)$ géométrique avec $u_{10} = 25$ et $u_{12} = 35$, calculer $u_0$.
   e. Un prix, chaque mois, augmente de 8% en début de mois et diminue de 8% en fin de mois. S'il vaut initialement 500€, combien vaut-il après deux ans ? (réponse environ 230€).
   f. $(u_n)$ géométrique de raison 0,98 vérifie $u_1 = 100$.
      Déterminer, en utilisant la calculatrice, le rang à partir duquel $u_n \leqslant 50$.
3. Reconnaître des suites :
   Sont-elles géométriques ? arithmétiques ? raison ? comportement ?

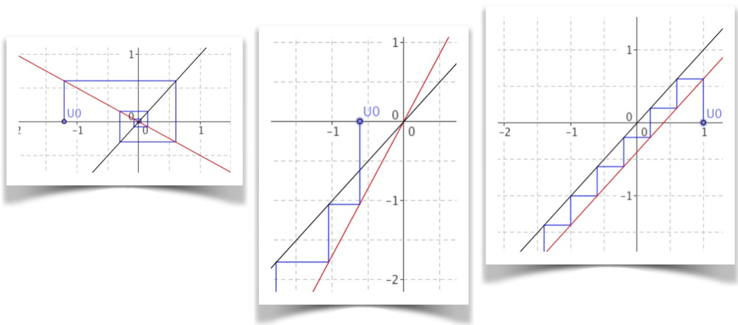


**Figure 2.**

# 2. Arithmético-géométriques / Homographiques

## 2.1. Arithmético-géométriques

### 2.1.1. Batterie d'exercices

Démontrer que $(v_n)$ est géométrique et en déduire le terme général de $(u_n)$ :

| | | |
|---|---|---|
| $u_{n+1} = 1,5\, u_n - 2$ | $u_0 = 10$ | $v_n = u_n - 4$ |
| $u_{n+1} = 0,5\, u_n + 1,5$ | $u_0 = 20$ | $v_n = u_n - 3$ |
| $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}(u_n + 9) - 3$ | $u_0 = -2$ | $v_n = u_n - 9$ |

### 2.1.2. $u_{n+1} = a\, u_n + b$

On pose $u_{n+1} = a\, u_n + b$ et $u_0 = 1$, où $a \neq 1$ et $b$ sont des réels quelconques.

1. Expliquer rapidement pourquoi $(u_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. Résoudre l'équation $x = a\,x + b$. On notera $x_0$ la solution.
3. On pose $v_n = u_n - x_0$. Vérifier que $(v_n)$ est géométrique. Donner le terme général de $(v_n)$.
4. En déduire le terme général de $(v_n)$ ainsi que sa limite.

### 2.1.3. $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4}$

On pose $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4} \\ u_0 = -5 \end{cases}$. On prend la suite *auxiliaire* $w_n = u_n - 1$.

1. Exprimer $w_{n+1}$ en fonction de $w_n$.
2. Nature et comportement de $(w_n)$ ? En déduire le comportement de $(u_n)$.
3. Donner le terme général de $(w_n)$ puis celui de $(u_n)$ et retrouver les résutats de la question 2.
4. Tracer les escaliers de la suite $(u_n)$, soit sur un papier, soit dans GeoGebra (soit les deux...).
5. Afficher les 50 premiers termes de $(u_n)$ dans un tableur.

## 2.2. Homographiques

1. **Exemple détaillé**

   On pose $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n}$. On pose aussi $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ (suite auxiliaire).

   a. Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} v_n & \leftarrow & u_n \\ & & \downarrow \\ v_{n+1} & \leftarrow & u_{n+1} \end{array}}$$

**Figure 3.** Il faut faire le tour (et donc retourner une flèche)

   b. Donner le terme général de $(v_n)$, puis celui de $(u_n)$. En déduire la limite de $(u_n)$.

   On trouve $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,v_n$.

   Notes : On aurait pu prendre la suite auxiliaire $w_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ à la place de $(v_n)$. Les chiffres 1 et 2 ont été obtenus en résolvant $x = \dfrac{3x - 2}{x}$.

2. Exemples où $(v_n)$ est géométrique :

| | |
|---|---|
| **1)** $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 4}{-u_n - 1}$ et $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 4}$ et $u_0 = 1$ | **2)** $u_{n+1} = \dfrac{-3u_n}{3 - 2u_n}$ et $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 3}$ et $u_0 = 1$ |

3. Piège avec $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$. Ici on peut exprimer $u_{n+2}$ en fonction de $u_n$ ou utiliser la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n - 1 - \sqrt{2}}{u_n - 1 + \sqrt{2}}$.

4. **Cas où $(v_n)$ est arithmétique, recherche d'énoncés**

   Il faut trouver les $f(x) = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$ ayant un point fixe double donc il faut que le discriminant de $\dfrac{a\,x + b}{c\,x + d} = x \Leftrightarrow c\,x^2 + (d - a)\,x - b = 0$ soit nul donc que $(d - a)^2 = -4b\,c$. On a alors $x_0 = \dfrac{a - d}{2c}$ on remarque, pour aider au calcul, que $(x_0)^2 = -\frac{b}{c}$.

   Il suffit de prendre $-b\,c$ carré parfait.

   On pose dans ce cas $v_n = \dfrac{1}{u_n - x_0}$ et l'on a $v_{n+1} = v_n + \dfrac{2c}{a + d}$.

   donc les exemples suivants conviennent :

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f(x)$ | $x_0$ | raison de $(v_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-2$ | 8 | 9 | $\dfrac{x-2}{8x+9}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1,6 |
| 1 | $-3$ | 3 | 7 | $\dfrac{x-3}{3x+7}$ | $-1$ | $\frac{3}{4}$ |
| 1 | $-2$ | 2 | 5 | $\dfrac{x-2}{2x+5}$ | $-1$ | $\frac{2}{3}$ |
| 11 | $-5$ | 5 | 1 | $\dfrac{11x-5}{5x+1}$ | 1 | $\frac{5}{6}$ |

### 2.3. Récurrences doubles

1. On pose $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 1,5\, u_{n+1} - 0,5\, u_n \end{cases}$.

   On pose aussi $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   a. montrer que $(v_n)$ est géométrique ;

   b. en déduire le terme général de $(u_n)$ ;

   *astuce : calculer $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ de deux manières différentes.*

   c. donner $\lim(u_n)$ puis résoudre $|u_n - 3| < 10^{-5}$.

## 3. Découverte des suites (1S)

### 3.1. Découverte des suites

1. Second degré masqué par une suite : résoudre $u_n \leqslant 0$ avec $u_n = -n^2 + \dfrac{27}{4} + 13n$.
2. On définit $(u_n)$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \end{cases}$. Calculer $u_1, u_2, u_3$.

### 3.2. Méthodes pour la monotonie

#### 3.2.1. L'exemple $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

*Cet exercice permet de découvrir quatre méthodes différentes pour étudier les variations d'une suite.*

On pose $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, démontrer que $(u_n)$ est croissante, de quatre manières différentes :

a) par $u_{n+1} - u_n$, b) par $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, c) par $u_n = f(n)$, d) en divisant par $n$ en haut et en bas.

Solutions :

a) Étude de $u_{n+1} - u_n$ :

On écrit $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$, c'est toujours positif !

b) Étude de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ :

On écrit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$ clairement supérieur à 1.

c) Étude de $f$ où $u_n = f(n)$ :

On écrit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ d'où $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ défini et positif dans $[0; +\infty[$ d'où la croissance.

d) Méthode directe :

1. On divise par $n$ en haut et en bas et on écrit $u_n = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n}}$ alors ensuite on part de $n \leqslant n+1$ et l'on reconstruit pour aboutir à $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. On écrit $n = n + 1 - 1$ et cela donne $u_n = \dfrac{n+1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et on procède comme à la ligne précédente.

### 3.2.2. Autres exemples, méthode par méthode

**Méthode $u_{n+1} - u_n$**

1. On pose $u_1 = 1$, puis $u_2 = 1 + \frac{1}{2}$, puis $u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ puis $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
   Démontrer que $(u_n) \nearrow$.

**Méthode $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.**

1. On pose $u_2 = 3$ et $u_{n+1} = u_n \times \frac{n-1}{n^2}$.
   a. démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $0 < \frac{n-1}{n^2} < 1$ ;
   b. démontrer que $(u_n)$ est décroissante.
2. On pose $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n \times \frac{2n-1}{2n^2}$.
   a. démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $0 < \frac{2n-1}{2n^2} < 1$ ;
   b. démontrer que $(u_n)$ est décroissante.
3. On pose $u_1 = 1$, puis $u_2 = 1 \times \frac{1}{2}$, puis $u_3 = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ puis $u_n = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n}$.
   Déterminer les variations de $(u_n)$.

**Méthode $u_n = f(n)$**

1. On pose $u_n = n^2 + 32 - 12n$. En écrivant $u_n = f(n)$, déterminer les variations de $(u_n)$.

### 3.2.3. Plus difficiles : les exemples $v_n = \frac{n^2 \times 3^n}{2^n}$ et $w_n = \frac{n^2 \times 2^n}{3^n}$

Trouver les variations des deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ avec :

1. $v_n = \frac{n^2 \times 3^n}{2^n}$ ;
2. $w_n = \frac{n^2 \times 2^n}{3^n}$ avec $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Ce sont de bons calculs en première.
1. Pour $v$ :

- la différence donne $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \left(\frac{3}{2}(n+1)^2 - n^2\right) > 0$ ;
- le quotient donne $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{3}{2}$ clairement supérieur à 1 ;
- la dérivation est hors-programme en première (utilise l'exponentielle) ;
- la méthode directe donne $v_n = n^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$, utilise les suites géométriques.

2. Pour $w$ :

- le calcul des premières valeurs montre que au départ, $w$ semble croître ;
- la méthode directe donne $v_n = n^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ : « croissante fois décroissante » ;
- on écrit le quotient : $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{2}{3}$.

Le programme de 1S indique « d'approcher la notion de limite par des exemples », et ici on a un bel exemple : le quotient $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ tend vers $2/3$ donc l'élève peut concevoir que $w$ croît puis décroît. Pour démontrer, on résoud $\frac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant 1$, et l'on trouve $n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} \approx 4,4495$.

Ainsi, $w$ croît jusqu'à $w_5$ puis décroît.

# 4. Études complètes (avec ou sans récurrence)

## 4.1. Exercices

1. On considère la suite $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ :
   a. Calculer $u_1$.
   b. Montrer par récurrence que pour tout entier $n$, on a $0\leqslant u_n<2$.
   c. Montrer par récurrence que pour tout entier $n$, on a $u_{n+1}\geqslant u_n$.
   d. La suite $(u_n)$ est-elle convergente ou divergente ?
2. Soit $u_n=\dfrac{4n-5}{3n+1}$, montrer que $(u_n)$ est bornée et trouver ses bornes de deux manières :
   a. en étudiant $u_n=\dfrac{4}{3}$ ;
   b. en étudiant $f(x)=\dfrac{4x-5}{3x+1}$.
3. Soit $u_n=\dfrac{2n+1}{2+n^2}$, prouver que $(u_n)$ est bornée et donner ses bornes (étudier $f$ associée).
4. On pose $u_{n+1}=\dfrac{n\,u_n+1}{2(n+1)}$ et $u_1=\dfrac{5}{2}$, en posant $v_n=n\,u_n-1$, trouver le terme général de $(u_n)$ et l'étudier.
   On trouve $(v_n)$ géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $u_n=\frac{3\times 0,5^n+1}{n}$. Ensuite, $u_n$ est le produit de deux suites décroissantes (et positives) donc décroît, vers 0.

## 4.2. Problèmes

### 4.2.1. D'après Pondichéry 2017

On pose $u_0=1$ et $u_{n+1}=2u_n-n+3$ et aussi $w_n=2^n$.

1. Expliquer comment rentrer ces deux suites dans un tableur. Pour $(w_n)$ il y a deux possibilités.
2. Question tirée du bac :

Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 3080 | 1024 |
| 13 | 11 | 6153 | 2048 |
| 14 | 12 | 12298 | 4096 |
| 15 | 13 | 24587 | 8192 |

Conjecturer les limites des suites $(u_n)$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

**Figure 4.** La colonne 10,11... indique $n$ ;
la colonne 3080,... indique $u_n$ ;
la colonne 1024,... indique $2^n$.

3. Montrer par récurrence que le terme général de $(u_n)$ est :
$$u_n=3\times 2^n+n-2.$$
4. Déterminer les limites de $(u_n)$, de $\left(\dfrac{1}{\ln(u_n)}\right)$.
5. Démontrer par récurrene que pour tout $n\geqslant 4$ on a $2^n\geqslant n^2$. En déduire la limite de $\left(\dfrac{n}{2^n}\right)$. En déduire la limite de $\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)$.
6. En remarquant que $\dfrac{x}{2^x}=\dfrac{x\ln 2}{\mathrm{e}^{x\ln 2}}$, retrouver la limite de $\left(\dfrac{n}{2^n}\right)$.

7. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang $n=3$.
8. Résoudre $u_n \geqslant 10^6$.
9. Résoudre $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 10^{-6}$. 10. Résoudre $\dfrac{u_n}{v_n} \geqslant -10^{-6}$.

#### 4.2.2. D'après Bac France 2013

On pose $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1$.

1. Calculer $u_1, ..., u_4$ et conjecturer les variations de $(u_n)$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant n+3$ et en déduire les variations de $(u_n)$.
3. On pose $v_n=u_n-n$, démontrer que $(v_n)$ est géométrique et en déduire le terme général de $(v_n)$, puis celui de $(u_n)$.
4. On pose $S_n=\dfrac{u_0+\cdots+u_n}{n^2}$, donner l'expression, puis la limite, de $(S_n)$.

## 5. Quelques suites remarquables

### 5.1. Fibonacci

### 5.2. Famille des suites de Farey

#### 5.2.1. Introduction

Prenons un nombre avec un chiffre après la virgule et multiplions le par 2 plusieurs fois de suite, regardons l'évolution du chiffre après la virgule. On peut dessiner au tableau un cercle $(8,6,2,4)$ dans lequel on peut arriver par différentes portes :

| départ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| entrée | 2 | déjà | 6 | déjà | −sort − | déjà | 4 | déjà | 8 |

.

On peut recommencer en multipliant par un chiffre $k$ autre que 2 :

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cercles | $(8,6,2,4)$ | $(3,9,7,1)$ | $(4,6)$ | $(5)$ | $(6)$ | $(1,7,9,3)$ | $(8,4,2,6)$ | $(1,9)$ |
| | $5 \rightarrow$ sort | $(2,6,8,4)$ | $(2,8)$ | $2,4,6,8 \rightarrow$ sortent | $(2)$ | $(2,4,8,6)$ | $5 \rightarrow$ sort | $(2,8)$ |
| | | $(5)$ | $5 \rightarrow$ sort | | $(8)$ | $(5)$ | | $(3,7)$ |
| | | | | | $(4)$ | | | $(4,6)$ |
| | | | | | | | | $(5)$ |

.

#### 5.2.2. Suite de Farey (1766-1826)

Géologue érudit, il aida la Révolution Industrielle en localisant des gisement de métal.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Farey
Beaucoup à programmer : temps de vol, hauteur maximale etc

### 5.3. Syracuse

## 6. Liens à regarder

http://www.universalis.fr/classification/histoire-des-sciences/histoire-des-mathematiques/
http://www.les-suites.fr/
http://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion:Suite_(mathématiques)
http://fr.wikipedia.org/wiki/Série_(mathématiques)
http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_(mathématiques)