Récurrence

Table of contents

1. Exercices avec des sommes

1. La somme des n premiers entiers est $S_n = 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

   Le démontrer par récurrence (on peut aussi le montrer par formule de suite arithmétique ou par astuce de Gauss).

2. La somme des n premiers carrés est $C_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Le démontrer par récurrence.

3. On appelle S'_n la somme $S'_n = 1\times 2+2\times 3+\ldots+(n-1)\times n$.

   Montrer par récurrence que pour tout n on a $S'_n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

4. Démontrer, pour le plaisir, que $C_n - S_n = S'_n$.

5. Pour la culture générale :

   $S''_n = 1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+\ldots+n(n+1)(n+2)$ est égal à $S''_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

   $S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+p)$ est égal à $S_{n,p} = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+p)}{p+1}$.

   $K_n = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Exercices avec des inégalités

1. (Inégalité de Bernoulli) Soit $x>0$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

   $$(1+x)^n > 1+n\,x.$$

   On amorce à 2. Pour l'hérédité, on part de $(1+x)^n > 1+n\,x$ et l'on multiplie de part et d'autre par $(1+x)$.

2. On considère la suite $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{1+u_n}$, montrer par récurrence que pour tout entier n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

3. On considère la suite $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, montrer par récurrence que pour tout entier n, on a $0 \leqslant u_n < 2$.

3. Exercices avec des suites

1. On définit (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$, démontrer que pour tout $n \geqslant 0$:

   $$u_n = \frac{3^n+1}{2}.$$

4. Autres exercices avec des factorielles

1. On pose $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.
   a. Calculer 3! et 4!.
   b. Simplifier $n! \times (n+1)$ et $\dfrac{(n+1)!}{n+1}$
   c. Est-ce que $(2n)! = 2 \times (n!)$?
2. Démontrer par récurrence sur n que pour tous $0 \leqslant k \leqslant n$:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :
$$\text{“pour tout réel } x > 0,\ \mathrm{e}^x > \frac{x^n}{n!}\text{”}.$$
Voici des indications :
   a. Vérifier l'initialisation (pour $n = 0$).
   b. Supposer que pour un certain n donné, on ait :
$$\text{pour tout réel } x > 0,\ \mathrm{e}^x > \frac{x^n}{n!}.$$
   Poser $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et déterminer $g'(x)$.
   c. Établir le tableau de variations de g.
   d. Conclure.

Remarque : on pourrait montrer par une méthode similaire que pour tout entier n, on a :
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^x - \frac{x^n}{n!} \right) = +\infty.$$