Étude de fonctions

(avec dérivation)

exercices typiquement pour les 1eS

Table des matières

1. Autour des formules de dérivation

1. Dériver $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ de trois manières différentes :
   a. avec la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$;
   b. avec la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)'$;
   c. avec la formule $\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$ et la formule $(x^\alpha)'=\alpha\, x^{\alpha-1}$.
2. Notations $x^{1/2}$ et x^{-1} :
   Pour $x>0$ on pose $x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ et $x^{1/2}=\sqrt{x}$.
   On rappelle que $a^{np}=(a^n)^p$, par exemple $x^{-3}=(x^{-1})^3$ ou $x^{3/2}=(x^{1/2})^3$.
   a. Calculer sans calculatrice : $a=5^{-1}$, $b=2^{-2}$, $c=10^{-3}$, $d=9^{3/2}$.
   b. Déterminer la dérivée $(x\sqrt{x})'$ de deux manières.
   c. Déterminer la dérivée $(1/\sqrt{x})'$ de deux manières.

2. Polynômes ou homographies

1. Étudier les fonctions de degré 3 suivantes :
   - $f(x)=x^3+3x^2-24x$;
   - $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$;
   - $f(x)=-x^3+\dfrac{9}{2}x^2\sqrt{3}-18x-18$.
2. Étudier les fonctions suivantes :
   - $f(x)=3x+\dfrac{2}{x}$.

3. Étudier les fonctions suivantes qui nécessitent $(u/v)'$ et $(1/u)'$:
   - $f(x) = \dfrac{3-2x}{1+x}$;
   - $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. Fonctions diverses

1. Variations de f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x}$.
2. Autour d'une fonction :
   a. résoudre $x \geqslant \sqrt{x}$;
   b. donner une formule pour $(u^2)'$;
   c. variations de f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (x-\sqrt{x})^2$.
3. Variations de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ et de $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Les deux questions sont indépendantes.
4. **Bon entraînement à l'organisation des calculs**
   On donne :
   $$f(x) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}.$$
   1) Dériver.
   a. Méthode 1 : en simplifiant d'abord.
   b. Méthode 2 : par des $\left(\dfrac{1}{u}\right)'$ successifs.
   2) Équation de la tangente en $\dfrac{1}{2}$.
   Réponses : $f'(x) = \dfrac{-1}{(2x+1)^2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ donc $T_{\frac{1}{2}}$: $y = \dfrac{2x+5}{8}$.

4. Fonctions avec paramètre

1. On pose $f(x) = x^3 - 3\,a\,x$, où a est un paramètre réel strictement positif.
   a. Démontrer que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{a}$		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

   b. Calculer les extremums ; en particulier donner la valeur de ces extremums lorsque $a = 4$.
   c. Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x) = 16$ suivant les valeurs de a.

5. Utilisation d'une fonction auxiliaire

1. On pose $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$. On pose $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
   Étudier les variations de g, puis celles de f.
2. Pour les élèves rapides :
   a. variations de $f(x) = x^{17} + x^{16}$;
   b. variations de $f(x) = 0,15x^5 - 2x^3 + 12x + 200$ (on déterminera $f''(x)$ pour étudier les variations, puis le signe, de $f'(x)$).

6. Problèmes avec graphiques ou géométrie

6.1. Exercices divers

1. Les deux droites et la parabole sont-elles concourrantes ?

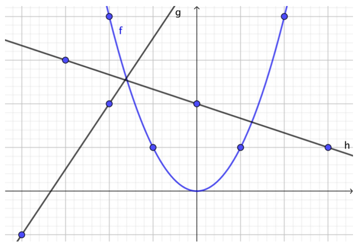

Figure 1. Deux droites et la parabole d'équation $y=x^2$.

2. Résoudre $x^2 \leqslant x$, d'abord graphiquement, puis par inéquation-produit.

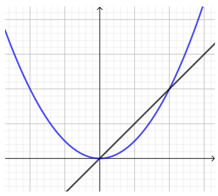

Figure 2. Courbe de $x \mapsto x^2$ et courbe de $x \mapsto x$.

3. Résoudre $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$, d'abord graphiquement, puis par inéquation-quotient.

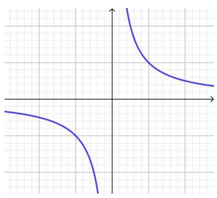

Figure 3.

4. On pose $f(x)=\dfrac{a\,x}{x^2+1}$, avec $a>0$.

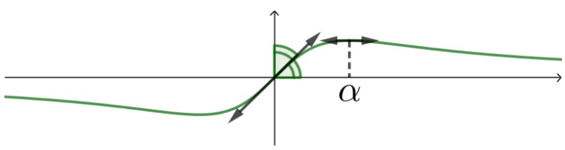

Figure 4.

   a. Déterminer par le calcul $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et vérifier que ce résultat est cohérent avec la courbe.

   b. Trouver la valeur de a en s'aidant du graphique.

   c. Déterminer par le calcul la valeur de α.

5. Soient $a>0$ et x, y les côtés d'un rectangle d'aire a.
   Pour quelles valeurs de x, y le demi-périmètre $x+y$ est-il minimal ?

Réponse : $x+y=x+\dfrac{a}{x}$, on pose $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$, alors $f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x^2-a}{x^2}$ d'où les variations de f :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

minimal pour $x=y=\sqrt{a}$, donc quand le rectangle est un carré..

6. Trouver le lieu des sommets des paraboles ayant au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x$.

   Réponse : $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ et l'on a $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ d'où $S\left(1-\dfrac{1}{2a};1-\dfrac{1}{4a}\right)$ qui vérifie $1-y_S=\dfrac{1-x_S}{2}\Leftrightarrow y_S=\dfrac{1+x_S}{2}$.

6.2. Problèmes

6.2.1. Une corde dans un carré

Sur cette figure, l'arc de cercle est de centre A, et on suppose que le côté du carré $ABCD$ a pour mesure 1. On pose $x=DM$ et $y=BN$.

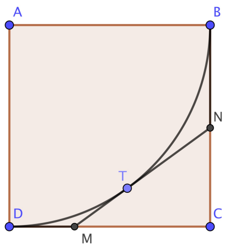

Figure 5.

1. Démontrer que $MN^2=x^2+y^2-2x-2y+2$.
2. Tracer $[AT]$, puis démontrer que $MN=x+y$.
3. Déduire des deux questions précédentes l'expression de y en fonction de x, puis l'expression de MN en fonction de x.
4. Étudier les variations de $MN(x)$ et en déduire la position de T pour que MN soit minimal.
5. Retrouver indépendamment de ce qui précède la valeur de x pour que A,T,C alignés.

   Réponses : $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ puis $MN=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ minimal pour $x=\sqrt{2}-1$.

   A,T,C alignés pour $TC=\sqrt{2}-1$ d'où $MC=2-\sqrt{2}$ et $MN=2\sqrt{2}-2$ et l'on retrouve le précédent x.