

Limites de fonctions

TABLE DES MATIÈRES

1.	REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES	1
2.	LIMITES DÉTERMINÉES OU PRESQUE	1
3.	LEVER DES INDÉTERMINATIONS	2
4.	DIVERS	2

1. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

1. Représenter les courbes C_f et C_g de deux fonctions vérifiant simultanément :

- pour tout $x < 1$, $f(x) < g(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$;
- pour tout réel x , $f(x) > 0$;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

2. 1) Vrai faux. *Justifier les réponses.*

On pose $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ et $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

- a. vrai faux : Si une fonction admet $x = 1$ pour valeur interdite alors son graphe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
- b. vrai faux : Le graphe de f admet une asymptote horizontale.
- c. vrai faux : Un graphe peut croiser ses asymptotes horizontales.
- d. vrai faux : Le graphe de g admet une asymptote verticale.

2. LIMITES DÉTERMINÉES OU PRESQUE

1. Limites en $+\infty$ de :

- a. $f(x) = 2 - x^4$;
- b. $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

2. Compléter les tableaux de produit et quotient de limites :

×	0	1	+∞
0			
1			
+∞			

÷	↔	0 ⁺	1	+∞
0 ⁺				
1				
+∞				

3. Compléter les tableaux de somme et différence de limites :

+	0	1	+∞	-∞
0				
1				
+∞				
-∞				

-	↔	0	1	+∞	-∞
0					
1					
+∞					
-∞					

4. Limites pour $x \rightarrow 0$ de :

a. $g(x) = \frac{1+x^2}{x}$

b. $h(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{x}$

5. Compléter les tableaux de produit et quotient de limites :

×	0	1	$+\infty$
0			
1			
$+\infty$			

÷	↔	0^+	1	$+\infty$
0^+				
1				
$+\infty$				

6. Compléter les tableaux de somme et différence de limites :

+	0	1	$+\infty$	$-\infty$
0				
1				
$+\infty$				
$-\infty$				

-	↔	0	1	$+\infty$	$-\infty$
0					
1					
$+\infty$					
$-\infty$					

3. LEVER DES INDÉTERMINATIONS

3.1. Exercices formateurs

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

Intéressant, expliquer graphiquement et faire le lien avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{11} - 1}{x - 1}$.

Deux méthodes, une avec $f'(a)$ et une avec $\frac{1 - q^n}{1 - q}$.

3.2. Exercices divers

cf aussi le livre Bordas.

1. Limites en $+\infty$ de :

a. $f(x) = x^3 - x^4$; b. $f(x) = \frac{x^3 - x^4}{90x^5 + x^6}$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x^2 + x}$

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x^2 + x}$

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 + 2})$

5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^3}{x^2 - x}$

6. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$, deux façons de faire, soit voir le 0^+ en bas, soit même dénominateur.

7. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \text{gauche}}} \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{x^2 - \frac{2}{x^4}}$
8. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + \cos^2 x)}{x + 1}$.

Remarque: la notation $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$.

4. DIVERS

1. 1) ROC

a. Donner la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

b. Soit f croissante dans \mathbb{R} et vérifiant $\lim_{+\infty} f = 2$.

Démontrer par des arguments logiques que pour tout x réel, $f(x) \leq 2$.

2. (0,5) On pose $h(x) = -\sqrt{x}$. Une fonction f vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Existe-t-il forcément un intervalle $[K; +\infty[$ dans lequel $f(x) < h(x)$?

3. 0,5) Question ouverte. On appelle *valeur absolue* d'un réel x la grandeur :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On pose $f(x) = \frac{x}{|x|}$ définie dans \mathbb{R}^* . On demande l'allure du graphe de f ainsi que les points de discontinuité des fonctions $x \rightarrow f(\sin(x))$ et $x \rightarrow \sin(\pi \cdot f(x))$.