Logarithme népérien

Table des matières

1. Relations algébriques

1. Calculer :

   a. $a=\ln(2-1)$

   b. $b=2\ln(1)-\ln(e)$

   c. $c=\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

2. Dérivation

2.1. Dérivées simples

1. i) Dériver $f(x)=\ln(3x)$
   ii) Dériver $g(x)=\ln(3)+\ln(x)$.
   On trouve la même chose, non ? Pourquoi ?

2. Soient a, b des réels non nuls. Donner une formule pour $f'(x)$ lorsque :

   a. $f(x)=\ln(a\,x)$;

   b. $f(x)=\ln\left(\frac{x}{b}\right)$.

3. Dériver :

   a. $f(x)=x\ln(x)$

   b. $g(x)=\ln(3x-9)$

   c. $h(x)=[\ln(x)]^2$. Astuce : Utiliser $(u^2)'=2u\,u'$.

2.2. Dérivées emboîtées

1. Dériver :

   a. $f(x)=\dfrac{x^2\ln x}{1+x^2}$;

   b. $g(x)=(\ln(1+x^2))^2$.

2. Dériver de deux manières différentes :

   a. $f(x)=x^2\ln x^2$;

b. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

3. ÉTUDE DE FONCTIONS

3.1. Études rapides

1. On pose, sur $]0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.
   a. Démontrer que $f'(x)=\dfrac{\ln x\,(2-\ln x)}{x^2}$. En déduire les variations de f.
   b. Pour $\lim\limits_{+\infty} f$, démontrer que $f(x)=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.
2. On pose $f(x)=\ln(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x})$.
   a. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est défini.
   b. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x.
   c. Déterminer les limites de f.
   d. Déterminer la position de C_f par rapport à la droite $y=x$.
   e. Déterminer les variations de f et y retrouver les résultats du b. si possible.

   Réponses :
   a. $X=\mathrm{e}^{2x}$ alors on veut $X^2-X>0 \Leftrightarrow X\in\,]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\Leftrightarrow x\in\,]0;+\infty[$.
   b. Cela revient à étudier le signe de X^2-X-1 :

x	/ / /	/ / /	/ / /	/ / /	$-\infty$		0		$\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
X	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
X^2-X-1		$+$	0	$-$		$-$	0		$+$		
$\ln(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x})$	/ / /	/ / /	/ / /	/ / /	$-\infty$	$-$	0		$+$		

3.2. Études avec fonction auxiliaire

1. On pose $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$ sur $]0;+\infty[$.
   a. On pose $\varphi(x)=1+x^2-2x^2\ln x$:
      i. Étudier les variations de φ.
      ii. Déterminer $\lim\limits_{0}\varphi$ et $\lim\limits_{+\infty}\varphi$.
      iii. Prouver que φ s'annule en un unique $a\in\mathbb{R}$, et que $a\in\,]1;\mathrm{e}[$.
   b. Démontrer que $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x(1+x^2)^2}$. En déduire les variations de f.
   c. Déterminer $\lim\limits_{0}\varphi$.
   d. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$ (on pourra démontrer que $f(x)\leqslant\dfrac{\ln x}{x^2}$).
2. On pose $f(x)=x^2+3x-x\ln x$ sur $]0;+\infty[$.
   a. Déterminer les variations de f'.
   b. En déduire les variations de f.

3.3. Études avec identification

1. On donne une fonction f définie sur $]0;+\infty[$, dont la courbe est la suivante :

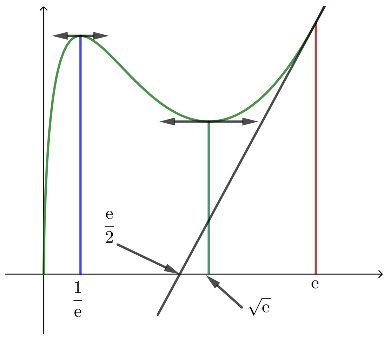

Figure 1.

On indique que $f(x) = 2x(a(\ln x)^2 + b\ln x + c)$, où a, b, c sont des réels.

a. Déterminer a, b, c à l'aide des informations fournies par le graphique.
Réponse : $(a, b, c) = (2, -3, 2)$.

b. Démontrer que $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$.

c. Donner le tableau de variations de f.

3.4. Familles de fonctions

1. Pour $k > 0$, on pose $f_k(x) = \ln x - k\,x^2 + 1$ sur $]0; +\infty[$.

   a. Déterminer $\lim\limits_{0} f_k$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f_k$ (on factorisera artificiellement $f_k(x)$ par x).

   b. Déterminer $f_k'(x)$, en déduire les variations de f_k sur $]0; +\infty[$.

   c. Déterminer, en discutant suivant k, le nombre de solutions de l'équation $f_k(x) = 0$.

   d. Le point $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ est sur une courbe C_k. Déterminer k.

   Réponse : le sommet a pour ordonnée $\dfrac{1 - \ln(2k)}{2}$ donc pour $k < \frac{\mathrm{e}}{2}$ deux solutions.

2. Pour $k > 0$, on pose $f_k(x) = \ln(\mathrm{e}^x + k\,x) - x$ sur $[0; +\infty[$.

   a. Déterminer $f_k(0)$.

   b. Démontrer que $f_k(x) = \ln\left(1 + k\,\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$, en déduire $\lim\limits_{+\infty} f$.

   c. Dresser le tableau de variations de f_k.

   d. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$.

   e. Pour $k < k'$, déterminer les positions relatives de C_k et de $C_{k'}$.