Exercices avec l'exponentielle

Table of contents

1. Exercices courts

1. Montrer que la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+\mathrm{e}^x}$ admet exactement une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

   Réponse : pour l'asymptote horizontale, montrer avec le TVI que $x\to x+\mathrm{e}^x$ admet exactement un zéro α et que $\alpha<0$.

2. 3. simplifier $\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{-3x}$

4. dériver $f(x)=\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{e}^{5x}$ et donner le sens de variations

5. Variations de $g(x)=(\mathrm{e}^x)^2$ et $h(x)=\mathrm{e}^{x^2}$.

6. étude de $f(x)=x-e^x$

7. étude de $f(x)=(x+2)e^{-3x}$

   Réponse $f'(x)=(-3x-5)\mathrm{e}^{-3x}$. Donc $+0-$ avec charnière en $x=-\dfrac{5}{3}$.

8. On pose $u(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x^2}}}$. Donner le tableau de variations de u.

2. Exercices longs

2.1. Utilisation d'une fonction auxiliaire

2.1.1. $f(x)=(4-2x)\mathrm{e}^x$

On pose sur $\mathbb{R}$: $f(x)=(4-2x)\mathrm{e}^x$ et C_f sa courbe.

1. Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Résoudre $f(x)=0$.

3. Donner l'équation de T, la tangente en 0.

4. On pose $g(x)=f(x)-(2x+4)$, déterminer $g''(x)$ et en déduire les positions relatives de C_f et de T.

Réponses :

On a :

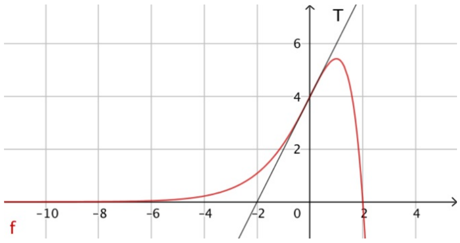

Figure 1.

Puis T: $y = 4 + 2x$ puis $g''(x) = -2x\,\mathrm{e}^x$ puis $g'(x) \leqslant 0$ donc $g \searrow$ donc C_f dessus puis dessous.

2.2. Exercices variés

2.2.1. $f(x) = 2x + 2 - \frac{-2e^{2x}+2}{e^{2x}+1}$

On pose $\boxed{f(x) = 2x + 2 - \frac{-2e^{2x}+2}{e^{2x}+1}}$.

1. Démontrer que f peut aussi s'écrire :
   $f(x) = 2x + \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}$ ou encore $f(x) = 2x + 4 - \frac{4}{e^{2x}+1}$.
2. Trouver $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.
3. Variations de f dans $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2x < f(x) < 2x + 4$.

Réponse : Pour la dérivée on part de $f(x) = 2x + 4 - \frac{4}{e^{2x}+1}$ et l'on trouve :

$$f'(x) = 2 - \frac{-4 \times u'}{u^2} = 2 - \frac{-4 \times (2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = 2 + \frac{8e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

Ceci est toujours positif car une exponentielle et un carré sont toujours positifs.
Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2.2.2. Deux tangentes à C_f avec $f(x) = C\,\mathrm{e}^{kx}$

On considère les fonctions $f(x) = C\,\mathrm{e}^{kx}$, où C et k sont des nombres réels non nuls.

1. Représenter sur un même repère le graphe de f pour les configurations suivantes :

C	1	1	-1	1	1
k	1	-1	-1	2	2

2. Écrire l'équation de la tangente à f en une abscisse a, en fonction de C et de k.
   Écrire cette équation sous la forme $y = C\,k\,\mathrm{e}^{ka}(x + \lambda)$.
3. On souhaite que les deux droites Δ et Δ' soient des tangentes à C_f, avec :

$$\begin{cases} \Delta & : \; y = \frac{5}{4}(x+1) \\ \Delta' & : \; y = \frac{5}{4\mathrm{e}}(x+5). \end{cases}$$

   Déterminer $C, k, a, a', \lambda, \lambda'$.

La tangente en a a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(a)\,(x-a) + f(a) \\ &= C\,k\,\mathrm{e}^{ka}(x-a) + C\,\mathrm{e}^{ka} \\ &= C\,\mathrm{e}^{ka}(k\,x + (1 - k\,a)) \\ &= y = C\,k\,\mathrm{e}^{ka}(x+\lambda), \end{aligned}$$

avec $\lambda = \frac{1}{k} - a$.

Maintenant, on veut que trouver un a et un a' tels que :

$$\left\{\begin{array}{ll} C\,k\,\mathrm{e}^{ka} &= \dfrac{5}{4} \\ \frac{1}{k} - a &= 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ll} C\,k\,\mathrm{e}^{ka'} &= \dfrac{5}{4\,\mathrm{e}} \\ \frac{1}{k} - a' &= 5. \end{array}\right.$$

En divisant la première ligne de gauche par la première ligne de droite on obtient :

$$\mathrm{e}^{k(a-a')} = \mathrm{e} \;\Leftrightarrow\; a - a' = \frac{1}{k}.$$

En soustrayant la seconde ligne de gauche par la seconde ligne de droite on obtient :

$$a' - a = -4 \;\Leftrightarrow\; a - a' = 4.$$

On trouve donc $\boxed{k = \frac{1}{4}, \text{ puis } \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ a' = -1 \end{array}\right. \text{ et enfin } C = 5\mathrm{e}^{-3/4}.}$

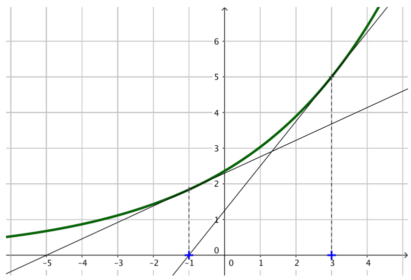

Figure 2. Courbe C_f et ses deux tangentes.

3. À propos de ch et sh

3.1. Introduction et propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Déterminer ch 0 et sh 0.
2. Limites en $\pm\infty$ de ch et de sh.
3. Parité ?
4. Tableau de signes de ch et de sh.
5. Déterminer $\operatorname{ch}' x$ tr $\operatorname{sh}' x$. En déduire les variations de ch et de sh.
6. Prouver de deux manières que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$:
   a. algébriquement, en remplaçant ch et sh par leur expression ;
   b. analytiquement, c'est-à-dire en posant $f(x) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$ et en étudiant les variations de f.
7. Trouver une relation entre $\operatorname{ch} 2x$ et $\operatorname{ch}^2 x$.
   Trouver une relation entre $\operatorname{sh} 2x$ et $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.
8. Montrer que pour tous réels a, b, on a :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a).$$

9. On pose $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$: limites, variations.

10. Montrer que :

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b)}{1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$$
$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th}(a)-\operatorname{th}(b)}{1-\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}.$$

11. Compléter le tableau suivant :

t	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$
$\operatorname{ch} t$											
$\operatorname{sh} t$											

.

a. Placer sur un graphique tous les points de coordonnées $(x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t)$.

b. Dans GéoGebra, définir un curseur en tapant $t = 1$ puis le point $M = (\cosh(t), \sinh(t))$, puis activer la trace de M.